

Sur la quantification des trajectoires relativistes

Jean-Pascal Laedermann, PhD

chercheur indépendant¹

novembre 2021

¹ pec@laedus.org

Mots-clés	3
Abstract	3
De la numérisation à la quantification	4
Rappel sur Schwarzschild, Kruskal et Szekeres	5
Apparition des tachyons	7
Passage du trou noir au trou blanc	8
Coût de la quantification	8
Réfutabilité du modèle	9
Deux trajectoires typiques	10
Outils de calcul	12
Analogie avec la mesure quantique	12
Du quantum à l'infinitésimal	13
Bibliographie	15

Mots-clés

Relativité générale, géodésique, numérisation, digitalisation, quantification, Schwarzschild, Kruskal-Szekeres, singularité, Lambert, tachyon, calcul en précision arbitraire, temps complexe, boost de Lorentz

Abstract

Les géodésiques sur une variété relativiste sont données dans une carte x par l'équation bien connue

$$x''^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha x'^\mu x'^\nu = 0$$

Cette équation peut se résoudre numériquement pas à pas et se transposer en une quantification. On étudie ici l'effet de cette quantification sur l'espace-temps de *Schwarzschild*, plus précisément dans la carte de *Kruskal-Szekeres*.

De la numérisation à la quantification

L'équation des géodésiques est obtenue par la méthode variationnelle d'*Euler-Lagrange*, avec le lagrangien issu de la métrique $g : L = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$. Le but est de trouver les solutions extrémisant

$\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{L} d\lambda$, qui se trouve être le temps propre d'une particule-test soumise au champ g . A la masse de la particule près, qui est en fait une énergie, ce temps propre est une action.

La recherche des solutions par voie numérique est extrêmement simple. On se donne un pas de digitalisation $\delta\lambda$ et un état initial (x, x') du mobile. La position x est incrémentée de $x'\delta\lambda$.

L'équation des géodésiques donne $x''^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$ et la vitesse x' est incrémentée de $x''\delta\lambda$. Puis on itère le processus.

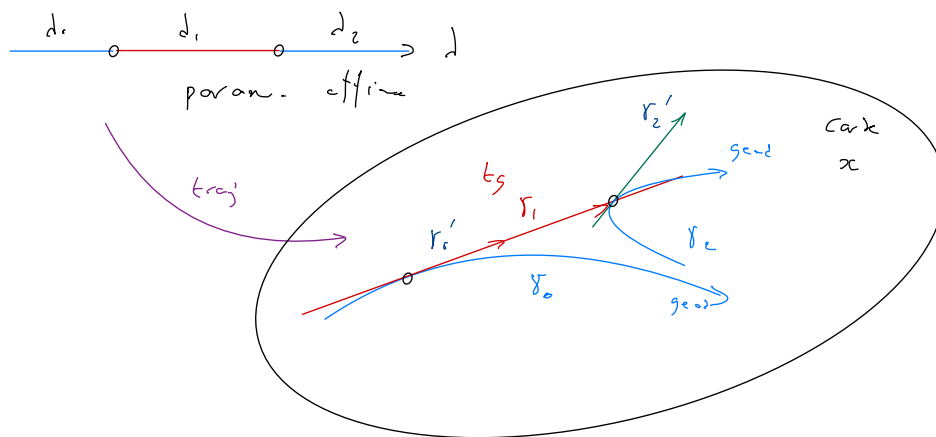


Fig 1. Un mobile passe d'une géodésique $\gamma_0(\lambda_0)$ à une géodésique $\gamma_2(\lambda_2)$ par un élément de trajectoire $\gamma_1(\lambda_1)$ sur un intervalle $\delta\lambda$, rectiligne dans l'espace tangent. On utilise le fait que les espaces tangents $T_x\mathbb{R}^n$ sont en fait inclus canoniquement dans \mathbb{R}^n .

Le choix du pas affine se fera ici en gardant un pas temporel propre constant $\delta\tau$, ce qui donne

$$\delta\lambda = \delta\tau/\sqrt{L}$$

Ce pas de temps propre peut être physiquement assimilé à un quantum d'action dans l'interprétation suivante.

A chaque étape, le mobile sollicite un quantum selon le système de coordonnées x choisi. Il utilise ce quantum pour poursuivre sa trajectoire dans son contexte local, qui est l'espace tangent à la variété spatio-temporelle au point actuel. Puis le nouvel état est considéré comme tel sur l'espace-temps global. Un observateur placé sur la particule se déplace pendant le quantum de temps selon une trajectoire linéarisée par le choix de sa carte.

Quelques faits remarquables apparaissent.

Primo, le système de coordonnées choisi par l'observateur est essentiel. La linéarisation de la trajectoire durant $\delta\tau$ dépend de la carte x et rend l'interaction entre l'espace-temps et l'observateur contextuelle. Il y a un effet de l'observation sur la trajectoire.

Secundo, il n'est pas exclu que le pas de quantification implique des vitesses supérieures à celle de la lumière. Ce phénomène peut être mis en rapport avec certains effets quantiques, comme la possibilité pour une particule de passer à travers une barrière de potentiel par effet tunnel, ou de violer la loi de conservation de l'énergie pendant un temps suffisamment court pour être autorisé par les relations d'incertitude de *Heisenberg*.

Tertio, dans le cas particulier du modèle de Schwarzschild avec un rayon r_S , il devient possible de se retrouver dans la zone interdite au-delà de la singularité nue décrite ci-dessous.

Rappel sur Schwarzschild, Kruskal et Szekeres

En 1916, Karl Schwarzschild est l'un des premiers à trouver une solution aux équations gravitationnelles de la relativité générale d'Einstein. Cette solution, qui décrit le champ créé par une masse ponctuelle, s'exprime par la métrique suivante en coordonnées polaires, avec une vitesse de la lumière $c = 1$ et un rayon de Schwarzschild r_S :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

On remarque immédiatement deux rayons singuliers. Le premier, $r = r_S$, donne l'horizon au-delà duquel une particule ne peut pas s'échapper, ce qui va donner le nom de *trou noir* à cette zone.

La seconde, $r = 0$, est une singularité de la métrique, dite *nue*, où toute particule entrant dans le trou noir termine sa trajectoire en un temps fini.

La transformation des coordonnées de *Kruskal-Szekeres* aboutit à une formulation en termes des variables (T, X, θ, φ) [1] :

$$d\tau^2 = \frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} (dT^2 - dX^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Le paramètre $r = r_S \left(\mathcal{W}_0 \left(\frac{X^2 - T^2}{e} \right) + 1 \right)$ est donné par la branche 0 de la fonction de

Lambert \mathcal{W} .

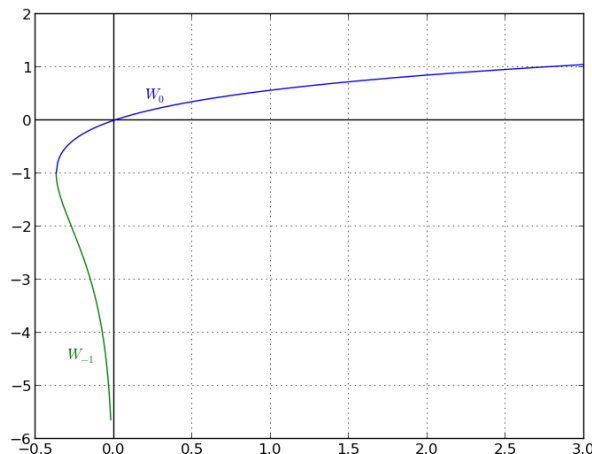


Fig 2. Branches réelles de la fonction de Lambert

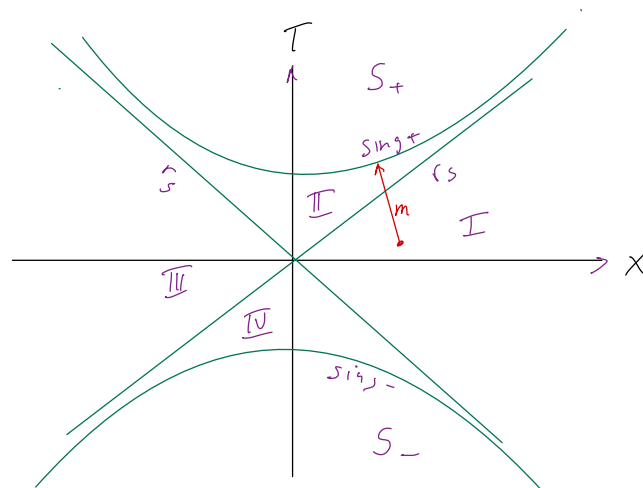


Fig 3. Carte de Kruskal-Szekeres

Le diagramme de la Fig 3 illustre les régions suivantes :

- I** espace-temps extérieur au trou noir
- II** trou noir
- III** autre composante connexe de l'espace temps
- IV** trou blanc
- S₊** intérieur de la singularité nue
- S₋** autre composante de l'intérieur de la singularité nue

Cette carte montre que l'horizon de Schwarzschild n'est pas une singularité physique, mais seulement un artefact due au choix de la carte.

Les lignes diagonales représentent l'horizon de Schwarzschild, et les deux branches frontières de l'hyperbole **sing₊** et **sing₋** l'entrée et la sortie de la singularité nue elle-même.

Une particule de la région **II** termine sa trajectoire sur **sing₊**, sans pouvoir ressortir. Dualelement, une particule de la région **IV** ne peut pas faire autrement que sortir, d'où le nom de trou blanc. On trouve aussi les expressions *puits* et *source* pour ces deux régions.

S₋ et **S₊** sont inaccessibles, ou interdites, car elles sont en dehors du domaine de la carte. Ces deux régions et leurs frontières sont associées à un seul point, le zéro des coordonnées polaires, et peuvent être considérées comme collapsées.

Du moins dans l'hypothèse d'un monde strictement continu ...

Apparition des tachyons

Traditionnellement, le terme de *tachyon* s'applique à une particule hypothétique dont la vitesse est plus grande que celle de la lumière. La sortie de la vitesse du cône du futur se traduit par le fait que $L < 0$, et donc d'un pas de quantification imaginaire. On propose ici d'utiliser un temps propre complexe :

$$\tau = \tau_r + i\tau_i \in \mathbb{C}$$

Ce temps est mesuré par deux horloges, l'une dite *réelle* et l'autre dite *imaginaire*.

L'accroissement du paramètre affine devient $\delta\lambda = \delta\tau_r/\sqrt{L}$ si $L > 0$, ou $\delta\lambda = i\delta\tau_i/\sqrt{-L}$ si $L < 0$. De cette manière, la trajectoire reste réelle dans la carte x . Pour un tachyon, c'est l'horloge imaginaire qui fonctionne, l'autre restant fixe, et le contraire pour une particule standard.

Pour un système de coordonnées quelconque sur l'espace-temps, les notions de temps et d'espace se retrouvent localement en plaçant dans l'espace tangent une base orthonormale qui diagonalise la métrique, puis, grâce à une éventuelle permutation des axes et une calibration des unités, d'obtenir la matrice diagonale de *Minkowski* $Diag(1, -1, -1, -1)$. La coordonnée 0 est alors le temps et les autres définissent l'espace. La base obtenue ainsi est nommée *tétrade*.

La vitesse propre $\dot{x} = \frac{\delta\lambda}{\delta\tau} x'$ se transforme en une quadrivitesse $u = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ où v est la vitesse spatiale du mobile. Soit v sa norme euclidienne et n_G le vecteur unitaire v/v dit de *glissement*. On obtient facilement $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$.

Si $v < 1$, il est possible de *mettre le mobile au repos* avec un boost de Lorentz $\Lambda(v)$, i.e.

$$\Lambda(v)u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $v > 1$, γ devient imaginaire pur. Néanmoins, il est possible d'étendre le boost par

$$\Lambda(v) = \Lambda\left(\frac{n_G}{v}\right) R\left(n_G, \frac{\pi}{2}\right)$$

où $R(n, \theta)$ est une rotation d'angle θ et d'axe n . On voit alors que $\Lambda(v)u = \begin{pmatrix} 0 \\ i n_G \end{pmatrix}$. La « *mise au repos* » avec ce boost étendu fait apparaître une particule dans la direction n_G avec un temps propre marqué par son horloge imaginaire. Comme $1/v < 1$, cette transformation est physiquement réalisable pour un observateur extérieur, et le tachyon pourrait être visible. On peut remarquer que le facteur i devant n_G est cohérent, puisqu'il implique bien un quadrivecteur de norme minkowskienne unité.

Passage du trou noir au trou blanc

L'apparition d'un état dans la zone interdite par la singularité pose un problème plus délicat. En effet, les coefficients de *Christoffel* font intervenir le paramètre

$$r = r_s \left(\mathcal{W}_0 \left(\frac{1}{e} (X^2 - T^2) \right) + 1 \right)$$

Or cette zone critique est définie par $X^2 - T^2 < -1$, qui fait sortir du domaine de \mathcal{W}_0 .

La solution proposée ici consiste à utiliser l'autre partie de cette fonction sur les réels, à savoir

$$r = r_s \left(\mathcal{W}_{-1} \left(\frac{1}{e} (X^2 - T^2)^{-1} \right) + 1 \right)$$

en inversant le terme $X^2 - T^2$, ce qui entre dans le domaine de \mathcal{W}_{-1} . La poursuite de la trajectoire se fait ensuite en *changeant les signes* de T et de X , ce qui fait passer le mobile du trou noir au trou blanc. Cette idée est suggérée par le caractère hyperbolique de la carte de Kruskal.

Coût de la quantification

L'évolution de la trajectoire pendant le quantum de temps ne se fait plus sur une géodésique, et nécessite donc un certain travail. La force qui apparaît lors de ce déplacement est donnée par

$$f^\alpha = x''^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha x'^\mu x'^\nu$$

et son travail sur le segment affine $\delta\lambda$ est donné par

$$\delta W = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_{\mu\nu} f^\mu x'^\nu d\lambda$$

Un rapide calcul montre que

$$\delta W = \frac{1}{2} \delta\lambda x'^\mu x'^\nu x'^\rho \int_0^1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} (x + x' \xi \delta\lambda) d\xi = \delta\lambda x'^\mu x'^\nu x'^\rho \int_0^1 \Gamma_{\rho\mu\nu} (x + x' \xi \delta\lambda) d\xi$$

Cette expression permet d'estimer l'énergie nécessaire à la quantification du mouvement.

Réfutabilité du modèle

Etant donné un quantum temporel, on peut se demander à quelle masse M_0 correspond un quantum d'action égal à la constante de Planck. En d'autres termes $M_0 c^2 \delta \tau = \hbar$.

Il est clair que plus la numérisation est fine, plus les trajectoires se rapprochent des géodésiques non quantifiées, ce qui a pour effet de différer l'apparition des effets quantiques cités ci-dessus.

Plus le quantum est petit, plus l'effet est tardif, et plus le temps de calcul est long. Les calculs effectués ici permettent de viser un quantum temporel d'environ 10^{-13} s qui correspond à une masse de $10^{-2} \text{ eV}/c^2$. Pour atteindre par exemple celle du neutrino, qui est actuellement estimée à $1.1 \text{ eV}/c^2$, il faudrait atteindre une résolution temporelle deux ordres de grandeurs au-dessous, ce qui se traduirait par des temps de calcul environ 100 fois plus long. Comme les calculs effectués ici nécessitent plusieurs jours, il n'est pas interdit de penser qu'une optimisation parvienne jusqu'à des particules réellement observables.

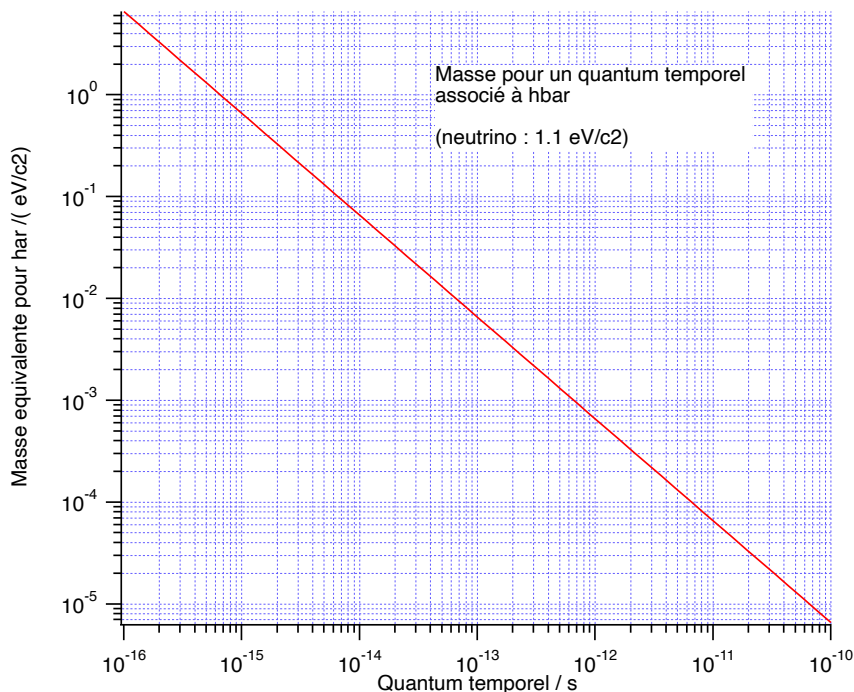


Fig 4. Relation masse - quantum temporel

Deux trajectoires typiques

D'une manière générale, les trajectoires finissent soit avec la vitesse limite 1, soit sur la singularité. Les tachyons sont fugaces, et reviennent dans l'espace-temps standard avec une vitesse finale 1.

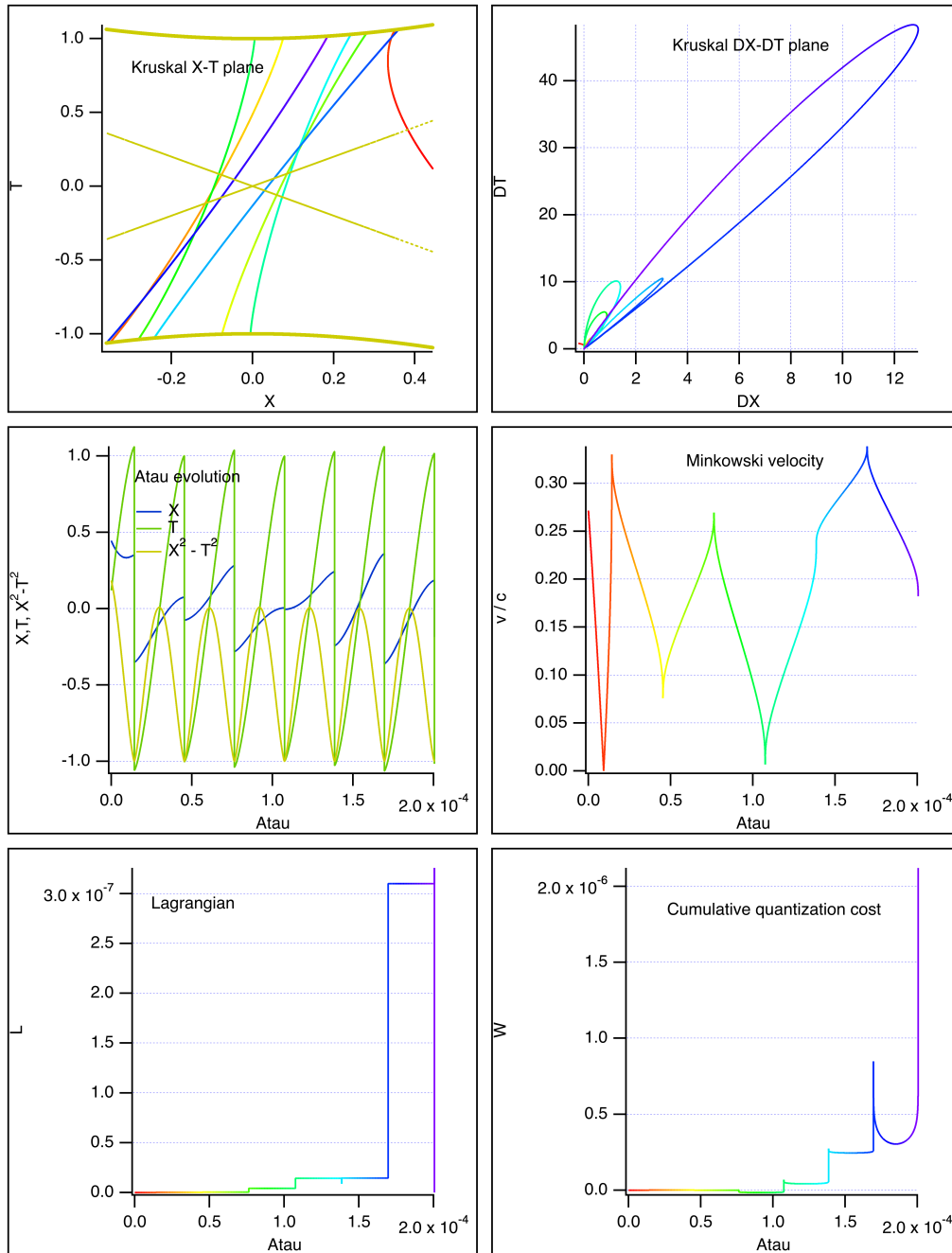


Fig 5. Trajectoire évoluant vers la singularité. La variable $Atau$ est simplement l'addition des deux horloges réelle et imaginaire. Le temps imaginaire se repère par un lagrangien négatif. Le départ de la trajectoire est en rouge et sa fin en bleu sombre. Les passages par la singularité sont localisés aux points où $X^2 - T^2 < -1$

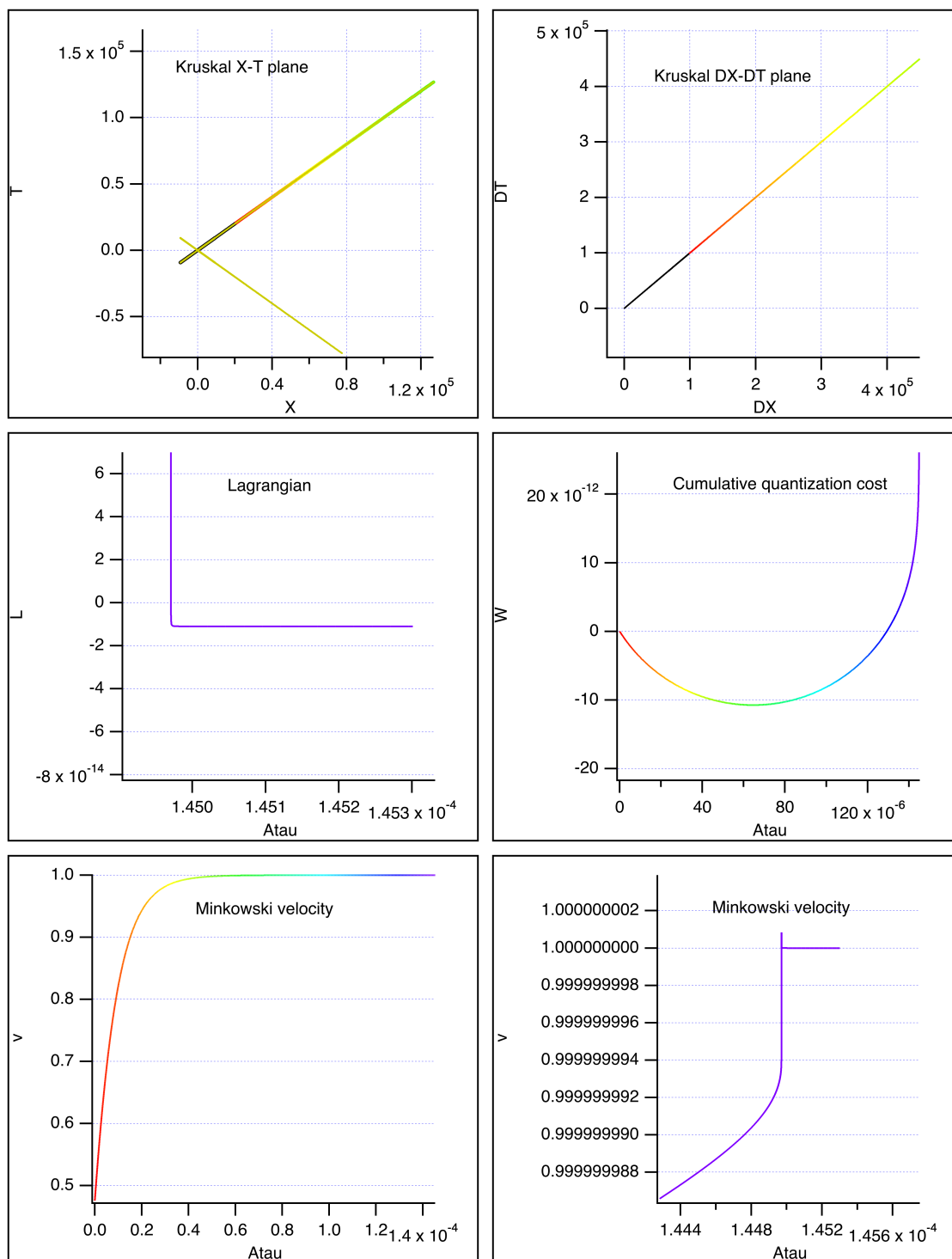


Fig 6. Trajectoire aboutissant à un tachyon, avant de finir sur la singularité. La coloration des deux graphiques du haut est donnée par l'horloge imaginaire depuis la partie noire. Le calcul a été refait en poussant la précision de 4096 à 8192 bits, sans différence notable.

Outils de calcul

Le suivi numérique des trajectoires se fait sur plusieurs millions de pas. La précision standard des ordinateurs actuels (double précision) est de 53 bits, ce qui est totalement insuffisant. La librairie *MPFR* [3] implémente le calcul avec une précision arbitraire, seulement limitée par la mémoire de la machine. Un interface écrit par *P. Holoborodko* [3] permet alors d'utiliser la librairie de calcul vectoriel *Eigen* [4]. L'étude très complète de *F. Johansson* [5] sur la fonction de Lambert donne enfin la possibilité d'effectuer le calcul des trajectoires, qui devient stable avec une précision de 4096 bits (environ 1200 décimales).

L'exploration des diverses trajectoires est programmée en C++ et utilise une machine à 128 processeurs tournant dans l'environnement *Gnu - Linux Ubuntu 20.4*.

Les trajectoires présentées ici nécessitent généralement plusieurs jours de CPU en parallèle.

Analogie avec la mesure quantique

On a décrit ci-dessus certains effets de l'observation d'un mobile relativiste pendant un quantum temporel $\delta\tau$. En résumé, le mobile suit naturellement une géodésique, puis pendant le temps de l'observation, il suit une tangente, puis il reprend sa trajectoire naturelle, mais sur une autre géodésique, voisine.

Cette séquence est similaire à celle de la mesure quantique, version Copenhague, où il existe deux évolutions possibles pour un système quantique. La première, dite *unitaire* (type *U*), est régie par l'équation de *Schroedinger* ou de *Dirac*. La seconde, qui apparaît lorsqu'on mesure le système, est dite *réduction du paquet d'ondes* (type *R*), et consiste à projeter cette fonction d'onde sur un espace propre associé à l'observable à mesurer.

Soit \hat{A} l'opérateur auto-adjoint traduisant une observable *A*. Mesurer *A*, si l'on suit l'école de Genève [8], c'est poser une suite de questions dont les réponses sont *oui* ou *non*. Une question sur *A* est par exemple : « La valeur de *A* apparaîtra-t-elle dans un certain intervalle Δ de la droite réelle ? ».

Soit $Sp \hat{A}$ le spectre de l'opérateur \hat{A} . Cette question est représentée par l'opérateur de projection $J_\Delta = \sum_{a \in \Delta \cap Sp \hat{A}} J_a^A$, où J_a^A est le projecteur sur le sous-espace propre de la valeur propre a ². Le

résultat de la mesure, i.e. la réponse à la question, sera *oui* avec la probabilité $p_1 = \langle \psi | J_\Delta | \psi \rangle$,

et le système se retrouvera ensuite dans l'état $|1\rangle = \frac{J_\Delta \psi}{\|J_\Delta \psi\|}$. La réponse *non* est traitée de la

même manière, mais avec le projecteur $J_{\mathbb{C}\Delta}$ et donne l'état final $|0\rangle$.

On peut imaginer que la mesure dure un intervalle de temps $\delta\tau$, et, après que la réponse ait été choisie de manière aléatoire, la fonction d'onde évolue « linéairement » vers son état final.

² $\hat{A} = \sum_{a \in Sp \hat{A}} a J_a^A$.

La version continue fait intervenir une intégrale, ce qui ne change rien à la discussion.

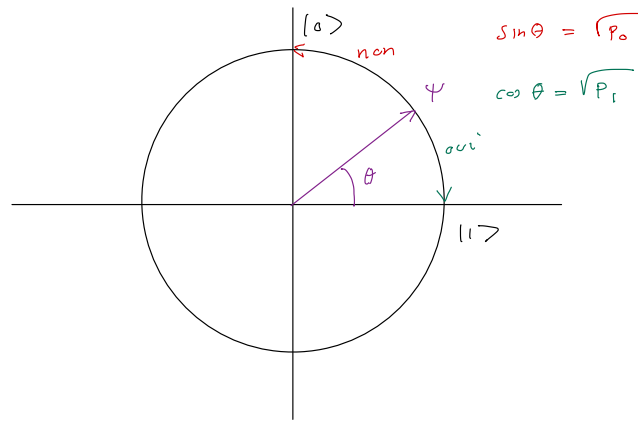


Fig 7. Evolution de l'amplitude de probabilité quantique en mode R

Par exemple, le chemin de la Fig 7 :

$$t \mapsto \psi_t = \cos \left(\theta \left(1 - \frac{t}{\delta\tau} \right) \right) |1\rangle + \sin \left(\theta \left(1 - \frac{t}{\delta\tau} \right) \right) |0\rangle \quad \cos \theta = \sqrt{p_1}$$

passé d'une manière uniforme et unitaire de ψ à $|1\rangle$ en cas de réponse *oui*.

Pour l'équation de Schroedinger, cette évolution est régie dans la base $(|1\rangle, |0\rangle)$ par l'opérateur hamiltonien

$$\hat{H}_1 = \frac{\theta\hbar}{\delta\tau} \sigma_2 \quad \theta = \arccos \sqrt{p_1}$$

où σ_2 est la deuxième matrice de Pauli. On peut remarquer que $\langle \hat{H}_1 \rangle = 0$

$$\psi_t = e^{\frac{\theta t}{i\delta\tau} \sigma_2} \psi = e^{\frac{\theta t}{\delta\tau} (|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)} \psi$$

Initialement, la fonction d'onde suit une trajectoire U donnée par un hamiltonien \hat{H} . Lors de la mesure, la réduction R est remplacée par une trajectoire U avec un hamiltonien proportionnel à σ_2 . Elle reprend ensuite la trajectoire U donnée par \hat{H} .

Du quantum à l'infinitésimal

Les infinitésimaux de *Leibnitz* et *Newton* n'ont reçu que récemment une base axiomatique cohérente. Ils ont été utilisés systématiquement par des mathématiciens comme *Euler*, *Lagrange* ou *Wallis* avec succès et sans justification rigoureuse. Les physiciens les utilisent sans autres forme de procès quotidiennement. L'axiomatisation de la continuité par *d'Alembert*, *Cauchy* et *Weierstrass* a failli sonner le glas de ces quantités, *aussi petites que l'on veut, mais non nulles* ...

Néanmoins, elles ont fait une réapparition étonnante par le biais des topos, munis de leurs logiques non forcément booléennes. Pour l'analyse infinitésimale lisse, par exemple, elles sont définies par le sous-ensemble de la droite $\Delta = \{\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0\}$, qui ne se réduit plus à $\{0\}$. On parle alors de nombres réels *nilpotents*. Ceci a pour effet de supprimer toutes les puissances supérieures ou égales à 2 dans les développements de *Taylor* sur cet ensemble. Autrement dit, toute fonction devient linéaire sur Δ , ou encore : Δ est une représentation de l'espace tangent en zéro qui est incluse dans la droite.

L'analyse qui précède effectue cette intégration avec en tête l'idée que le quantum temporel pourrait se comprendre idéalement à partir des nilpotents.

Les effets quantiques aux voisinages des singularités ne sont pas sans évoquer la formule de *John Lane Bell* :

Vale *ict*, ave *iε* ! [6]³

en prolongement de la discussion sur l'introduction du temps imaginaire par Minkowski [7].

J.-P. Laedermann, novembre 2021

³ Adieu *ict*, bonjour *iε* !

Bibliographie

- [1] **T. Müller** *Catalogue of Spacetimes*, 2.2.5,
<https://arxiv.org/abs/0904.4184v3>
- [2] **P. Holoborodko** *MPFR C++*, <http://www.holoborodko.com/pavel/mpfr/>
- [3] **Gnu** *MPFR library*, <https://www.mpfr.org/>
- [4] **Eigen** *library*, <https://gitlab.com/libeigen/eigen>
- [5] **F. Johansson** *Computing the Lambert W function in arbitrary-precision complex interval arithmetic.*
<https://arxiv.org/abs/1705.03266>

- [6] **J. L. Bell** *A Primer of Infinitesimal Analysis, 2nd Edition*,
Cambridge 2008, p80
- [7] **W. Misner, S. Thorne, J.-A. Wheeler**
Gravitation, Box 2.1 p51
Princeton University Press 2017
- [8] **C. Piron** *Mécanique quantique*, PPUR 1990