Stone-Hilbert-Evolution

Plongement de l’analyse des contextes formels dans une structure constructiviste

Jean-Pascal Laedermann

28 août 2023

(Ver 03)

Introduction

Le but de ce survol est d'inclure la structure de contexte formel due à Hermann Wille dans un environnement logique constructiviste.

L'analyse des concepts formels (ACF) distingue des **objets** et des **attributs**. Ces concepts peuvent être reliés par une **implication** dite **sémantique**.

Les attributs sont aussi des propositions énoncées au sujet des objets. Ces propositions peuvent être combinées par les connecteurs logiques de conjonction (∨), disjonction (∧), implication (→), et niées par l'opérateur de négation (¬). L'ensemble des attributs peut donc être muni d'une logique de Boole ou de Heyting.

Les objets sont les supports des attributs, et deviennent des opérateurs de validation.

Le théorème de représentation de Stone permet de définir canoniquement des topologies sur les espaces d'objets et d'attributs.

Le plongement de l'analyse des concepts formels dans un environnement constructiviste, permet d'obtenir l'ordre de ce dernier comme limite de l'implication sémantique, à condition de passer par la **double négation**.

Analyse des concepts formels

Introduction

Rudolf Wille introduit deux ensembles finis. (Réf)[1]
Un ensemble d'objets G et un ensemble d'attributs M [2].

Il définit une relation d'incidence gIm qui s'énonce « g a l'attribut m ».
Muni de la relation d'incidence, le produit $G \times M$ définit le **contexte formel** : $\mathscr{G}$

Le tableau de la relation $G \times M \to \mathbf{2} = \{0,1\} \quad \langle g, m \rangle \mapsto gIm$ permet de définir les dérivés :

$g' = \{m \in M \,|\, gIm\}$ qui est l'ensemble des attributs de l'objet g.
$m' = \{g \in G \,|\, gIm\}$ qui est l'ensemble des objets ayant l'attribut m.

Ces notions se généralisent aux sous-ensembles d'objets et d'attributs :

$A \subseteq G \quad A' = \{m \in M \,|\, g \in M \Longrightarrow gIm\}$
qui est l'ensemble des attributs communs aux objets de A

$B \subseteq M \quad B' = \{g \in G \,|\, m \in B \Longrightarrow gIm\}$
qui est l'ensemble des objets possédant tous les attributs présents dans M

Une paire (A, B) est un **concept formel** ssi $A' = B \ et \ B' = A$.
A est son **extension** et B son **intension**.

---

[1] Il est possible de généraliser à M infini.

[2] G est mis pour *Gegenstände*, et M pour *Merkmale*

Les concepts formels peuvent s'exprimer comme $\langle A'', A' \rangle$ ou $\langle B', B'' \rangle$ pour tout A et B (resp.) de G et M. Si $B = B''$, le concert formel sera noté simplement B, car $B''' = B'$.

L'intérêt des concepts formels est que la relation d'ordre $\langle A_0, B_0 \rangle \leqslant \langle A_1, B_1 \rangle \iff A_0 \subseteq A_1$fait de cet ensemble un **treillis complet**. On a aussi $\langle A_0, B_0 \rangle \leqslant \langle A_1, B_1 \rangle \iff B_0 \supseteq B_1$

Expressions

Objets : $\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)' = \bigcap_{j \in J} A_j'$ Extensions : $\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)'' = \bigcap_{j \in J} A_j$

Concepts : $\bigvee_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \left\langle \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)'', \bigcap_{j \in J} B_j \right\rangle$ $\bigwedge_{j \in J} \langle A_j, B_j \rangle = \left\langle \bigcap_{j \in J} A_j, \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)'' \right\rangle$

Le but de cette section est d'inclure ces notions dans le contexte précédent, et de montrer dans quelle mesure ces concepts sont des approximations de ceux d'une certaine algèbre.

Implication sémantique

Soient B_0, B_1 deux sous-ensembles de M.

Définition

$(\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1) \iff (\forall B \subseteq M)(B_0 \subseteq B \implies B_1 \subseteq B)$**, o**n peut aussi l'écrire
$(\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1) \iff (\forall B \subseteq M)(B_0 \nsubseteq B \ ou \ B_1 \subseteq B)$

Proposition

$\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1 \iff B_1 \subseteq B_0''$

Demo

Si $\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1$, alors $(\forall g)(B_0 \nsubseteq g' \ ou \ B_1 \subseteq g')$ car $g' \subseteq M$.

Mais $B_0'' = \left(\bigcup_{g \in B_0'} \{g\} \right)' = \bigcap_{g \in B_0'} g'$. Comme $B_0 \subseteq B_0''$, on a $(\forall g \in B_0')(B_0 \subseteq g')$ et le premier argument du ou n'est jamais vérifié. Donc $(\forall g)(B_1 \subseteq g')$ et $B_1 \subseteq B_0''$

D'autre part, supposons que $B_1 \subseteq B_0''$.
On aimerait montrer que $B_0 \nsubseteq g' \ ou \ B_1 \subseteq g'$.
Si $B_0 \nsubseteq g'$, c'est évidemment vrai.
Si $B_0 \subseteq g'$, on a $B_0'' \subseteq g''' = g'$ et $B_1 \subseteq B_0''$

qed

Autre expression : $B_0' \subseteq B_1'$

On dit aussi que c'est une d'**implication de contexte,** ou **d'attributs**, ou encore que B_0 est une **prémisse** de B_1.

Remarques

L'implication n'est pas définie seulement pour les concepts formels. Lambrecht montre comment retrouver les concepts formels depuis l'ensemble des implications valides dans $\mathscr{P}M$.

Cette implication correspond à la relation d'ordre des concepts :

$\langle A, B\rangle \leqslant \langle A_1, B_1\rangle \Longleftrightarrow A \subseteq A_1 \Longleftrightarrow B' \subseteq B_1' \Longleftrightarrow \mathscr{P}M \vDash B \Rightarrow B_1$

Environnement constructiviste

Attributs abstraits

D'une manière générale, les attributs sont en relation d'implication. Ceci donne un pré-ordre sur leur ensemble. Quotientant par la relation d'équivalence de Lindenbaum, on obtient ainsi un ordre, qui sera ici celui d'une **algèbre de Heyting complète $\mathfrak{H}$**. Ces algèbres sont regroupées dans la catégorie *cHey.* La catégorie des *Frm* possède la même structure, mais ses morphismes ne conservent pas l'implication.

Les **attributs abstraits** seront des **éléments** d'une cHey $\mathfrak{H}$.

Objets abstraits, filtres

Un objet est caractérisé par des attributs. Il sera donc défini a priori par un sous-ensemble $F \subseteq \mathfrak{H}$. La possession d'un attribut implique automatiquement celle des attributs qui sont plus généraux. Un ours blanc est un ours. Il est donc naturel de rendre F fermé vers le haut : $m_0 \in M, m \geqslant m_0 \Longrightarrow m \in M$. De plus, si un objet possède deux attributs, il doit aussi posséder la conjonction de ces attributs : $M \ni m_0, m_1 \Longrightarrow M \ni m_0 \wedge m_1$ [3].

Les **objets abstraits** seront donc associés à des **filtres** sur $\mathfrak{H}$.

On distingue d'emblée plusieurs sortes de filtres, donc d'objets abstraits.

Impropres

Si un filtre contient $\bot$, il est égal à l'algèbre elle-même par clôture. L'objet associé possède tous les attributs. C'est le *Dieu* des logiciens médiévaux et le résultat explosif d'un *Ex Falso Quodlibet*. On parle ici de filtre impropre, ou **du** filtre impropre, car il n'y a en fait qu'un par algèbre [4]. Ce filtre définit en fait le contexte général, qui est celui de tous les attributs envisageables.

Premiers

La **primarité** d'un filtre se définit par $m_0 \vee m_1 \in F \Longrightarrow m_0 \in F \ ou \ m_1 \in F$.

---

[3] On ne suppose pas cette condition en logique quantique.

[4] Un argument célèbre sur l'inexistence de *Dieu* consiste à lui faire créer une pierre qu'il ne puisse pas soulever. Ceci montre qu'il ne peut pas être tout puissant. Or cet argument ne tient pas, car Il peut très bien être en même temps puissant et non tout-puissant !

Leurs propriétés seront développées sotto.

Exhaustifs

Proposition

i) $u = a \vee \neg a$
ii) $\neg u = \perp$
iii) $\neg\neg u = \top$

sont équivalentes.

Demo

i) implique ii) $\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = \perp$
ii) implique iii) trivial
iii) implique ii) trivial
ii) implique i) $\neg u = \perp \implies u = u \vee \neg u$

qed

Définition

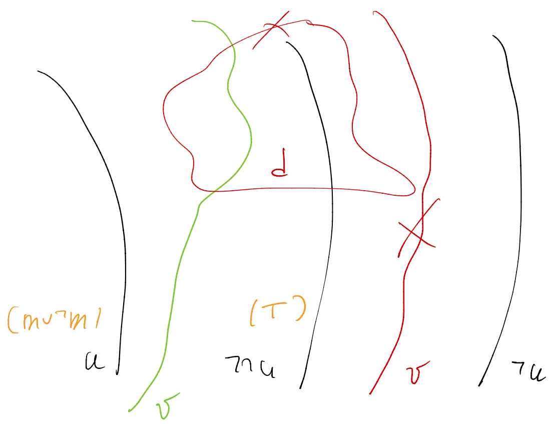
Un attribut qui vérifie une de ces conditions est dit **presque vrai**.

Soit $Q = \{m \vee \neg m \,|\, m \in \mathfrak{H}\}$ l'ensemble des attributs presque vrais.

Un filtre sera dit **exhaustif** ssi $F \supseteq Q$.

Une caractérisation équivalente est $\neg\neg m \in F \implies m \in F$.
En effet, si F est exhaustif, soit $\neg\neg m \in F$. On a $\neg\neg m \wedge (m \vee \neg m) = m \in F$, et si l'implication ci-dessus est vraie, comme $\neg\neg(m \vee \neg m) = \top$ est dans F , $m \vee \neg m$ l'est aussi.

Remarquons que l'espace entre $u \;\; et \;\; \neg u$ est un no-man's land pour tout u, en ce sens que si $d \wedge u = \perp \; et \; d \wedge \neg u = \perp$, on a $d \wedge (u \vee \neg u) = \perp$, puis $d \leqslant \neg(u \vee \neg u) = \perp$. En d'autres termes, il n'existe aucun attribut non absurde incompatible à la fois avec avec u et avec $\neg u$. En particulier, l'espace entre $m \vee \neg m \;\; et \;\; \top$ est aussi un no man's land. Ceci ne prouve toutefois pas que les attributs presque vrais sont des co-atomes.



Maximaux

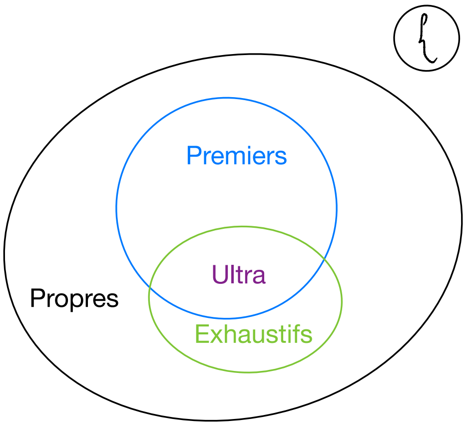
La théorie des treillis définit encore des filtres qui sont maximaux. Il sont caractérisés par $(\forall m \in \mathfrak{H})(m \in F \ ou \neg m \in F)$ et sont nommés **ultrafiltres**.

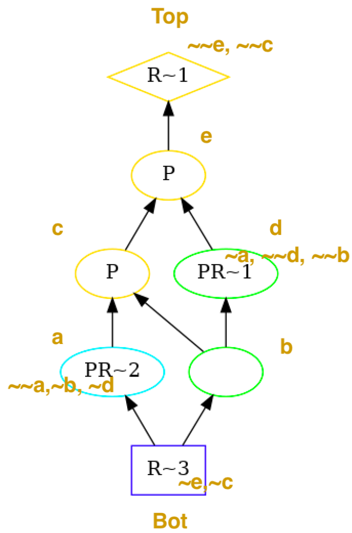
Remarques

Il existe des filtres exhaustifs non-premiers : $c, e, \top$.

Il existe des filtres premiers non exhaustifs : $d, e, \top$.

Les filtres premiers et exhaustifs sont les ultrafiltres.





Quotients

Tout filtre F induit une relation d'équivalence sur $\mathfrak{H}$: $m_0 \sim m_1 \iff m_0 \leftrightarrow m_1 \in F$, ou de manière équivalente $(\exists w \in F)(m_0 \wedge w = m_1 \wedge w)$.

On montre que les connecteurs $\wedge \ et \ \vee$ passent au quotient et que la relation $[m] \leqslant [n] \iff [m \wedge n] = [m]$ définit bien une relation d'ordre qui fait de $\mathfrak{H} \,|\, F$ une cHey.

La projection est un homomorphisme $J \in Hom_{cHey}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \,|\, F)$

Pour l'objet impropre, le quotient se réduit à $\bot$.

Pour un objet exhaustif, le quotient est une algèbre de Boole.

Pour un objet maximal, le quotient se réduit à l'algèbre de Boole minimale $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$.

Objets premiers et dual

On montre que tout filtre premier est le co-noyau d'un homomorphisme de *Frm* $\pi : \mathfrak{H} \to \mathbf{2}$ [5], et que son complémentaire est un idéal premier principal. Ceci permet de définir le dual $\mathfrak{H}' = Hom_{Frm}(\mathfrak{H}, \mathbf{2})$ et de considérer les **objets premiers comme des éléments de ce dual**.

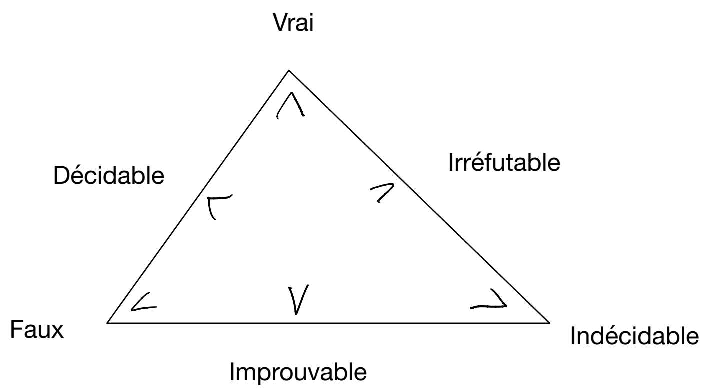
On se limitera désormais à ces objets que l'on désignera génériquement par g.
On dira qu'un objet g **valide un attribut** m si $g(m) = 1$.
Son filtre associé est donc $F = \overset{-1}{g}(1)$, son idéal $I = \overset{-1}{g}(0)$ et on a $I = \complement F$.

L'ensemble des idéaux premiers constitue le **spectre** de la cHey : $Spec\ \mathfrak{H}$.
Comme I est principal, on a $I = \downarrow \bigvee I$ et son élément générateur est un **élément premier** de l'algèbre. L'ensemble de ces éléments sera désigné par $PrEl(\mathfrak{H})$.

Le filtre $F = \overset{-1}{g}(1)$ est donc l'ensemble des attributs que possède l'objet g. Le caractère concret de ce dernier est fondé sur la primarité du filtre : $m \vee n \in F \implies m \in F\ ou\ n \in F$.
Le connecteur $\vee$ sur l'objet se réalise dans la disjonction *ou* de l'observateur. La consistance de l'objet est garantie par le fait que les filtres premiers sont propres.

Valeurs de vérité, incertitude

Le choix de la logique constructiviste permet d'envisager d'autre valeurs de vérité que *vrai* ($\top$) ou *faux* ($\perp$). Il est tout à fait possible d'avoir dans l'idéal $I = \complement F$ à la fois une proposition m et sa négation $\neg m$.



On introduit les valeurs suivantes :

5 Le passage au quotient de l'implication n'est pas garanti.

valeur	définition …		
vrai	$m \in F$		
faux	$\neg m \in F$		
décidable		$m \vee \neg m \in F$	
indécidable		$m \vee \neg m \in I$	
improuvable			$m \in I$
irréfutable			$\neg m \in I$

Une proposition m est donc

- **vraie** si elle appartient au filtre
- **fausse** si sa négation est vraie
- **décidable** si sa disjonction avec sa négation est vraie; comme le filtre est premier, l'une ou l'autre est vraie
- **indécidable** si cette disjonction est dans l'idéal; comme c'est un idéal les deux arguments lui appartiennent et ni l'un ni l'autre n'est vrai
- **improuvable** si elle est fausse ou indécidable, dans ce dernier cas le filtre n'est pas assez puissant pour la prouver
- **irréfutable** si elle est vraie ou indécidable, dans ce dernier cas, le filtre est incapable de la réfuter, i.e. de montrer que sa négation soit vraie

Les filtres maximaux (ultrafiltres) définissent les objets les plus précis. Ils rendent toute proposition décidable. On pourra parler d'ultra-objets. Ce sont les seuls qui **conservent l'implication**.

L'**incertitude** associée à un objet est représentée par le quotient $\mathfrak{H} \,|\, \overset{-1}{g}(1)$

Topologies

Préordre canonique associé à une topologie

Soit X un espace topologique. Le préordre **canonique** sur X est donné par $x \sqsubseteq y \iff x \in \overline{\{y\}}$. Ce préordre est aussi dit **de spécialisation**, mais en l'absence d'une direction conventionnelle, on préférera le terme canonique (Réf).

Espace de Sierpinski

$\mathbf{2}$ est muni de la topologie d'ouverts $\{\varnothing, \{1\}, \mathbf{2}\}$, dite de Sierpinski.

Topologie sur les objets

Le théorème de représentation de Stone permet de placer une topologie sur $\mathfrak{H}'$ de la manière suivante. Soit l'application $\mathscr{D} : \mathfrak{H} \to \mathscr{P}(Spec\, \mathfrak{H})$ définie par $\mathscr{D}(m) = \{I \in Spec\, \mathfrak{H} \,|\, I \not\ni m\}$. Ces ensembles définissent les ouverts du spectre de $\mathfrak{H}$.

$\mathscr{D}$ est un isomorphisme de *Frm* entre $\mathfrak{H}$ et le treillis $\Omega(Spec\, \mathfrak{H})$. En particulier, on a $\mathscr{D}(\bigwedge_{i \in \boldsymbol{k}} m_i) = \bigcap_{i \in \boldsymbol{k}} \mathscr{D}(m_i)$ pour tout ordinal fini $\boldsymbol{k}$ et $\mathscr{D}(\bigvee_{i \in K} m_i) = \bigcup_{i \in K} \mathscr{D}(m_i)$ pour tout ensemble K, fini ou infini. L'implication se traduit par $\mathscr{D}(m \to n) = \overset{\circ}{\overline{\complement \mathscr{D}(m) \cup \mathscr{D}(n)}}$ et la négation par $\mathscr{D}(\neg m) = \overset{\circ}{\complement \mathscr{D}(m)}$.

La théorie des treillis montre que l'application $j : Hom_{Frm}(\mathfrak{H}, \mathbf{2}) \to Spec\, \mathfrak{H}$ donnée par $j(g) = \overset{-1}{g}(0)$ est une bijection. On transporte les ouverts $\mathscr{D}(m)$ sur $\mathfrak{H}'$ par l'application réciproque $\overset{-1}{j}$. La topologie ainsi obtenue est caractérisé par $\overset{-1}{j}\, \mathscr{D}(m) = \{g \,|\, g(m) = 1\}$. Introduisant une notation biduale $\hat{m}(g) = g(m)$, on obtient $\overset{-1}{j}\, \mathscr{D}(m) = \overset{-1}{\hat{m}}(1)$. Pour tout attribut m, $\hat{m} : \mathfrak{H}' \to \mathbf{2}$ est donc continue.

Soit $\mathfrak{H}''$ l'ensemble des applications continues de $\mathfrak{H}'$ vers $\mathbf{2}$. La correspondance $m \mapsto \hat{m}$ est bijective (demo). On identifie ainsi l'algèbre à son bidual.

Remarquons que $\overset{-1}{\hat{m}}(1)$ est l'ensemble des objets qui possèdent l'attribut m .

L'ordre canonique sur $\mathfrak{H}'$ est un ordre de spécialisation, en ce sens que $g \sqsubseteq h \iff \overset{-1}{g}(1) \subseteq \overset{-1}{h}(1)$. L'objet h possède plus d'attributs que l'objet g, il est plus spécial.

La bijection j transporte l'ordre de $\mathfrak{H}'$ vers $Spec\, \mathfrak{H}$. On a que $I \sqsubseteq J \iff I \supseteq J$. L'idéal représente l'incertitude sur un objet, i.e. les attributs à son sujet qui sont improuvables (soit indécidables, soit faux). Un objet plus spécial portera moins d'incertitude.

Topologie sur les attributs

La topologie mise sur les attributs est la plus grossière qui rende les morphismes $g \in Hom_{Frm}(\mathfrak{H}, \mathbf{2})$ continus lorsque $\mathbf{2}$ est muni de la topologie de Sierpinski. Autrement dit, une base d'ouverts est donnée par les $\overset{-1}{g}(1), g \in \mathfrak{H}'$. On remarque que les filtres premiers sont ouverts et les idéaux premiers fermés. Comme tout idéal est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent, les fermés sont les réunions finies d'idéaux quelconques (propres ou non).

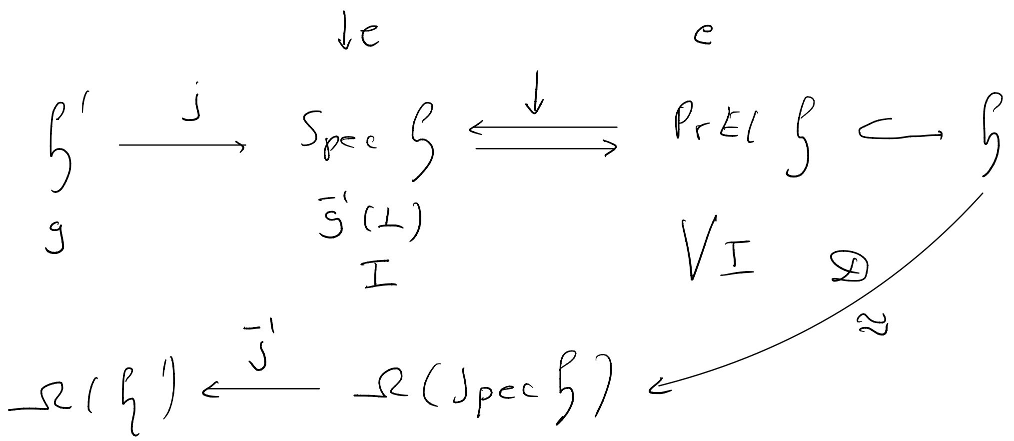
L'ordre canonique associé est celui de l'algèbre lui-même.

Comme $m \leqslant n \implies g(m) \leqslant g(n)$ et l'on a $\overset{-1}{\hat{m}}(1) \subseteq \overset{-1}{\hat{n}}(1)$.
n est un attribut qui est satisfait par plus d'objets. Il est donc plus général que m.
L'ordre canonique est ici un ordre de généralisation.

Un attribut est d'autant plus précis qu'il est petit. L'attribut à information minimale est $\top$, qui est le seul élément du plus petit filtre premier sur $\mathfrak{H}$. Il est satisfait par tous les objets, et l'information qu'il contient est nulle. A l'opposé se trouve l'attribut $\perp$, qui ne fait partie d'aucun filtre premier, donc n'est satisfait par aucun objet. L'information qu'il contient peut être considérée comme infinie.

Synopsis

g	objet
m	proposition, attribut, propriété
$\hat{m}(g) = g(m) = 1$	l'objet g vérifie la proposition m, m est un attribut de g



$\overset{-1}{\hat{m}}(1)$	**extension** de la proposition m, ensemble des objets qui vérifient m
$F = \overset{-1}{g}(\top)$	**intension** de l'objet g, ensemble des attributs de l'objet g, filtre premier
$e = \bigvee I$	élément premier, **ombre** de l'objet g
$\downarrow e = I$	ensemble des propositions improuvables pour l'objet g
$\mathscr{D}$	frame-isomorphisme de Stone
j	homéomorphisme

Plongement de l'ACF dans une cHey

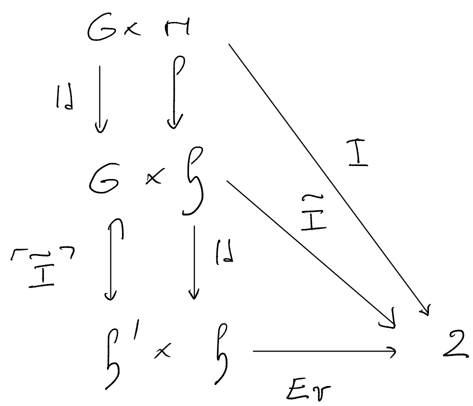
Interprétation en termes d'algèbre

Très naturellement, on peut considérer une structure $\mathfrak{H}$ sous-jacente qui permet d'accueillir le formalisme de Wille. On inclura les attributs dans l'algèbre : $M \subseteq \mathfrak{H}$, et les objets dans son dual $G \subseteq \mathfrak{H}'$. La relation d'incidence devient simplement l'**évaluation** $gIm = g(m)$.

La structure sous-jacente au contexte formel est le produit $\mathfrak{H}' \times \mathfrak{H}$, qui contient $G \times M$ comme sous-ensemble.

Remarque

Pour justifier cette inclusion, le diagramme suivant doit être commutatif.



On obtient :

$$\begin{array}{rcl} m' & = & \overset{-1}{\hat{m}}\,(\,\top\,) \cap G \\ g' & = & \overset{-1}{g}\,(\,\top\,) \cap M \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} m'' & = & \uparrow m \cap M & \qquad & A'' & = & \bigcap_{A \subseteq m'} m' \cap G \\ g'' & = & \uparrow g \cap G & & B'' & = & \bigcap_{B \subseteq g'} g' \cap M \end{array}$$

Ouverture de l'extension et de l'intension

Proposition

$\overset{-1}{j}\, \mathscr{D}(m) = m'$
$m' = \overset{-1}{\hat{m}}\,(1) \cap G \qquad g' = \overset{-1}{g}\,(1) \cap M$
$A' = \bigcap\limits_{g \in A} g' \qquad B' = \bigcap\limits_{m \in B} m'$

Les intentions et les extensions des concepts sont les traces des ouverts de $\mathfrak{H}' \times \mathfrak{H}$ sur $G \times M$.

Paradoxalement, $A = A''$ et $B = B''$ sont nommées relations de fermeture, alors que cela donne des ouverts de $\mathfrak{H}$.

De l'importance de la notion de concept formel

Résumons..

L'environnement de base est un ensemble d'attributs qui forment une cHey $\mathfrak{H}$
Les objets abstraits sont des éléments de $\mathfrak{H}'$, des homs de frames.
Un tableau de Wille est une sous-ensemble $G \times M \subseteq \mathfrak{H}' \times \mathfrak{H}$.
La relation d'incidence est donnée par $gIm \iff \langle g, m \rangle \in G \times M \ et \ g(m) = 1$

Proposition

Si $g_0, g \in G$ alors $g_0 \in g'' \iff g_0(\bigwedge g') = 1$

Demo

$g_0 \in g'' \iff (\forall m \in g')(gIm) \iff (\forall m \in g')g_0(m) = 1 \iff g_0(\bigwedge g') = 1$

qed

CAVEAT

On ne peut pas écrire $g_0 I \bigwedge g'$ car rien ne permet d'affirmer que $\bigwedge g' \in M$.
Il est évidemment possible de l'ajouter à M, mais il faut actualiser I sur tous les éléments de g''.
On remarque que l'approximation d'un objet abstrait g doit être donnée par $\langle g'', g' \rangle$.

L'ordre de l'algèbre comme limite de l'implication sémantique

Proposition

$$\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1 \iff \overset{-1}{j}\,\mathscr{D}(\bigwedge B_0) \cap G \subseteq \overset{-1}{j}\,\mathscr{D}(\bigwedge B_1) \cap G$$

Demo

$g \bigwedge B_0 = 1 \iff (\forall m \in B_0)(g(m) = 1)$ et $g \in \overset{-1}{j}\,\mathscr{D}(m) \iff g(m) = \top$

qed

Proposition

$$(\forall g \in G)(\bigwedge B_0 \leqslant \bigwedge B_1 \mod g) \Longrightarrow \mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1$$

Demo

Si $\bigwedge B_0 \to \bigwedge B_1 \in \overset{-1}{g}(1)$et que $\bigwedge B_0 \in \overset{-1}{g}(1)$, on a par modus ponens $\bigwedge B_1 \in \overset{-1}{g}(1)$

qed

Proposition

Si $\overline{G} = \mathfrak{H}'$, alors $\mathscr{P}M \vDash B_0 \Rightarrow B_1 \Longrightarrow (\forall g \in G)(\neg\neg \bigwedge B_0 \leqslant \neg\neg \bigwedge B_1 \mod g)$

Demo

$\overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \bigwedge B_0 \cap G \subseteq \overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \bigwedge B_1 \cap G$ est équivalent à $\overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \bigwedge B_0 \cap \complement\, \overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \bigwedge B_1 \cap G = \varnothing$, ce qui donne $\overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \bigwedge B_0 \cap \overset{-1}{j}\,\mathscr{D} \neg \bigwedge B_1 \cap G = \varnothing$, donc
$\overset{-1}{j}\,\mathscr{D}(\bigwedge B_0 \wedge \neg \bigwedge B_1) \cap G = \varnothing$.
Mais si $\overline{G} = \mathfrak{H}'$, on a $\overset{-1}{j}\,\mathscr{D}(\bigwedge B_0 \wedge \neg \bigwedge B_1) = \varnothing$, donc $\bigwedge B_0 \wedge \neg \bigwedge B_1 = \bot$, puis $\neg \bigwedge B_1 \leqslant \neg \bigwedge B_0$ et on a le résultat.

qed

Corollaire

$$\overline{G} = \mathfrak{H}, \mathscr{G} \vDash m_0 \Rightarrow m_1 \Longrightarrow \neg\neg m_0 \leqslant \neg\neg m_1$$

Conclusion

L'implication d'attributs basée sur $\mathscr{P}M$ apparaît donc bien comme une approximation de la relation d'ordre de $\mathfrak{H}$ au fur et à mesure que G se densifie dans $\mathfrak{H}'$, à condition de passer par la célèbre **double négation de Gödel-Genzen**. Ceci n'est pas étonnant, car l'implication définie par le contexte formel est une définition ensembliste, donc booléenne.

Les objets de l'algèbre peuvent être envisagés comme des **noumènes** qui seraient en arrière plan de celui des objets du contexte formel. Ces derniers définissent des **phénomènes**. Les concepts formels s'interprètent comme des **observations**.

La **perte d'information** due à l'observation, qui ne voit que le contexte formel $G \times M$ dans $\mathfrak{H}' \times \mathfrak{H}$, se traduit par la **trace d'un ouvert de $\mathfrak{H}'$ sur l'ensemble des objets** G. En effet, soit un concept formel $\langle A, B \rangle$ et $g \in A$. Comme $A = B'$, on a $g(m) = \top$ et $g \in G$ pour tout $m \in B$.

I.e : $(\bigwedge B)' = \{g \in G \,|\, g(\bigwedge B) = \top\} = \{g \,|\, g(\bigwedge B) = \top\} \cap G = \overset{-1}{\widehat{\bigwedge B}}(\top) \cap G$

Références

[R0] https://en.wikipedia.org/wiki/Specialization_(pre)order
https://ncatlab.org/nlab/show/specialization+order
[R1] Johnstone - Stone spaces 1982.pdf, p14
[R2] Lambrechts - Formal Concept Analysis 2011 .pdf