Sur l’équivalence des modèles de Kripke et Heyting

Jean-Pascal Laedermann
14 décembre 2023

(ver 01)

Abstract 3
Ingrédients 3
Implications de Heyting et de Kripke 4
Définitions 4
Domaines de validation 4
Futur, essence et modus ponens 5
Conclusion 7
Annexes 8
Implémentation C++ 8
Bibliographie 9

Abstract

La logique intuitionniste peut être décrite en utilisant une algèbre de Heyting $\mathfrak{H}$ complète ou un arbre de Kripke $\mathfrak{K}$ basé sur l'ensemble ordonné de mondes défini par les filtres complètement premiers de $\mathfrak{H}$.

Le but de cet article est d'analyser les implications basées sur ces deux modèles

Ingrédients

Une théorie locale sera un sous-ensemble de propositions F de $\mathfrak{H}$ considérées comme vraies à un certain moment, ou dans un certain contexte. Ses propriétés naturelles sont les suivantes :

- elle est cohérente : $F \not\ni \perp$
- si deux propositions sont en relation $a \leqslant b$ et que a est vraie, b l'est aussi, ce qui donne $a \in F \Longrightarrow b \in F$
- toute conjonction finie de propositions vraies est vraie
- une disjonction quelconque de propositions est vraie si au moins l'une d'elle l'est

Ceci correspond exactement à la notion de filtre complètement premier. L'ensemble des théories locales sera désigné par $Th\ \mathfrak{H}$. Ces théories peuvent être vues sous plusieurs angles.

Les complémentaires des filtres premiers sont des idéaux premiers I. Par définition, ces derniers constituent le spectre de l'algèbre $Sp\ \mathfrak{H}$. Ces idéaux sont principaux, et leurs plus grands éléments $p = \bigvee I$ sont les points $Pt\ \mathfrak{H}$ de l'algèbre[1].

La catégorie des algèbre de Heyting complètes $cHey$ possède les mêmes objets que deux autres catégories : celle des Frames Frm, et celle des Locales Loc. La seule différence entre $cHey$ et Frm se situe aux niveau de leurs morphismes : ceux de Frm ne conservent pas l'implication. La catégorie des locales obtenue par inversion des flèches : $Loc = Frm^{op}$.

L'objet initial de $cHey$ est donné par l'ordinal $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$, c'est la plus petite algèbre de Boole non triviale. Cet objet permet de définir le dual de l'algèbre par $\mathfrak{H}' = Hom_{Frm}(\mathfrak{H}, \mathbf{2})$. Soulignons le fait que l'on n'exige pas que ces homomorphismes conservent l'implication. Les éléments du dual seront des W-objets g. Cette nomenclature est basée sur l'analyse des concepts formels de Wille.

Les paires (F, I) sont générée par les W-objets selon $I = \overset{-1}{g}\ \perp$ et $F = \overset{-1}{g}\ \top$. On remarque qu'une proposition $a \in F$ satisfait à $g(a) = \top$, ce qui correspond bien au fait qu'elle est vraie pour la théorie locale F. L'idéal complémentaire contient alors les propositions improuvables par F, autrement dit celles qui sont fausses $\neg a \in F$ et celles qui sont indécidables : $a \notin F\ et\ \neg a \notin F$.

[1] *Johnstone p41* : les points de la locale $\mathfrak{H}^{op}$ sont les g^{op}

Le théorème de Stone permet de représenter $\mathfrak{H}$ par une topologie sur son spectre $\Omega(Spe\,\mathfrak{H})$ en associant à toute proposition a l'ensemble des idéaux qui ne le contiennent pas. L'application $\mathscr{D} : \mathfrak{H} \to \Omega(Sp\,\mathfrak{H}) \quad a \mapsto \mathscr{D}(a) = \{I \in Sp\,\mathfrak{H} \,|\, I \not\ni a\}$ définit les ouverts de cette topologie. Le résultat fondamental est le suivant. Toute topologie étant une algèbre de Heyting complète pour les opérations ensemblistes standard, $\mathscr{D}$ est un isomorphisme de $cHey$ entre $\mathfrak{H}$ et $\Omega(Sp\,\mathfrak{H})$.

Les W-objets, théories locales et points étant en bijection avec les idéaux, on transporte cette topologie sur ces ensembles. En particulier, les ouverts de Pt seront désignées par Σ_a.

Implications de Heyting et de Kripke

Définitions

L'<u>implication de Heyting</u> est donnée par $a \to b = \bigvee \{c \in \mathfrak{H} \,|\, c \wedge a \leqslant b\}$.

Si l'on considère la relation d'ordre de l'algèbre du point de vue informationnel, on voit que plus une proposition est grande, moins elle contient d'information. L'implication apparaît ainsi comme la proposition à information minimale qui, à l'aide de a, permet de prouver b.

L'image de l'implication via l'isomorphisme $\mathscr{D}$ s'exprime par $\mathscr{D}(a \to b) = Int(\complement\mathscr{D}(a) \cup \mathscr{D}(b))$. Il est utile d'introduire ici la notion d'<u>implication matérielle</u> sur $\mathfrak{H}$ par $a \supset b = \neg a \wedge b$, et similairement sur $\Omega(Sp)$ par $\mathfrak{D}(a) \supset \mathscr{D}(b) = \complement\mathscr{D}(a) \cup \mathscr{D}(b)$. Cette implication correspond à la définition habituelle des algèbres de Boole.

Munissons l'ensemble des théories de la relation d'inclusion. Une théorie F' sera dite postérieure à une théorie F ssi $F' \supseteq F$. Si l'on prend ces théories pour mondes de Kripke, on obtient de manière naturelle le forçage $F \vDash a \iff F \ni a$.

L'<u>implication de Kripke</u> est donnée par

$$F \vDash a \to_K b \iff (F' \supseteq F \implies (F' \vDash a \implies F' \vDash b))$$

L'implication est forcée à une certaine étape F ssi toute théorie postérieure validant a valide aussi b. Soulignons que l'on ne peut pas remplacer ici $\vDash$ par $\ni$, car rien ne permet de supposer qu'il existe un élément $a \to_K b \in \mathfrak{H}$ correspondant à cette définition.

Domaines de validation

Plaçons-nous dans le spectre. Le fait qu'une théorie F valide une proposition a devient $I \in \mathfrak{D}(a)$. Le <u>domaine de validation de l'implication de Heyting</u> correspondant aux théories qui valident $a \to b$ est donc exactement l'ouvert $\mathscr{D}(a \to b)$ dans le spectre.

On pose $H(a, b) = \{I \,|\, I \in \mathscr{D}(a \to b)\}$.

Pour calculer le domaine de validation de l'implication de Kripke, traduisons cette dernière dans le spectre par complémentation :

$$\begin{aligned} F \vDash a \to_K b \quad &\iff \quad I' \subseteq I \Longrightarrow (I' \not\ni a \Longrightarrow I' \not\ni b) \\ &\iff \quad I' \subseteq I \Longrightarrow (I' \in \mathscr{D}(a) \Longrightarrow I' \in \mathscr{D}(b)) \\ &\iff \quad I' \subseteq I \Longrightarrow I' \in \complement\mathscr{D}(a) \cup \mathscr{D}(b) \end{aligned}$$

Mais

$$I' \subseteq I \iff (u \in I' \Longrightarrow u \in I) \iff (I' \notin \mathscr{D}(u) \Longrightarrow I \notin \mathscr{D}(u)) \iff (\mathscr{D}(u) \ni I \Longrightarrow \mathscr{D}(u) \ni I')$$

Tout ouvert contenant I contient aussi I', ce qui donne du point de vue topologique $I \in \overline{\{I'\}}$.
Ceci correspond à l'<u>ordre de spécialisation</u> de la topologie sur le spectre, noté $I \sqsubseteq I'$. I' est plus spécifique que I. La théorie F' est plus puissante que F.

De plus $I' \in \bigcap_{u \notin I} \mathscr{D}(u) \iff (u \notin I \Longrightarrow I' \in \mathscr{D}(u)) \iff (u \notin I \Longrightarrow u \notin I') \iff I' \subseteq I)$.
On obtient ainsi le domaine de validation suivant

$$K(a,b) = \{I \mid \bigcap_{u \notin I} \mathscr{D}(u) \subseteq \mathscr{D}(a) \supset \mathscr{D}(b)\}.$$

De plus, si $I' \subseteq I \; et \; I \not\ni a \to b$, on a aussi $I' \not\ni a \to b$.

On a donc la

Proposition

$$\begin{aligned} I \in H(a,b) \quad &\iff \quad \uparrow_{\sqsubseteq} I \subseteq Int(\mathscr{D}(a) \supset \mathscr{D}(b)) \\ I \in K(a,b) \quad &\iff \quad \uparrow_{\sqsubseteq} I \subseteq \mathscr{D}(a) \supset \mathscr{D}(b) \end{aligned}$$

En outre, on a $Int(\bigcap_{u \notin I} \mathscr{D}(u)) = \mathscr{D}(\bigwedge F)$.

Futur, essence et modus ponens

Ce qui précède motive les

Définitions

Le <u>futur</u> de I sera $Fut\, I = \uparrow_{\sqsubseteq} I$, et similairement $Fut\, F = \uparrow_{\subseteq} F$. C'est l'ensemble des théories plus puissantes que F.

L'<u>essence</u> d'une théorie F sera $Ess\, F = \bigwedge F$. C'est la conjonction de toutes les propositions de F. Dans le cas infini, cet essence n'est pas forcément valide.

Remarques

$$Int\, Fut\, I = \mathscr{D}\, Ess\, F$$

L'incertitude associé à l'essence d'une théorie locale est l'intérieur de son futur.

Cette formulation cabalistique ouvre la porte à l'analyse non-standard

Il y a une différence essentielle entre les implications de Kripke et de Heyting. Pour H, le futur doit être à l'intérieur de l'implication matérielle, alors que pour K, il doit être simplement contenu dans cette dernière. L'exigence H est intériorisable dans $\mathfrak{H}$ par l'élément $a \to b$, c'est une exigence statique. L'exigence K est dynamique, et ne peut pas être intériorisée par un élément de $\mathfrak{H}$, vu que le sous-ensemble du spectre $\mathscr{D}(a) \supset \mathscr{D}(b)$ n'est a priori ni ouvert, ni fermé.

Néanmoins, cette différence ne change rien aux processus de démonstration, comme on va le voir sotto.

Proposition

$H \Longrightarrow K$

Immédiat, car $\mathring{\supset} \subseteq \supset$

Proposition

Si $\mathfrak{H}$ est finie, on a $K \Longrightarrow H$

En effet : $\begin{array}{l} \bigcap_{u \notin I} \mathscr{D}(u) \subseteq \supset \\ \mathscr{D}(\bigwedge_{u \notin I} u) \subseteq \mathring{\supset} \end{array}$

Proposition

Si $a \in F$, alors $K \Longrightarrow a \to b \in F$

Demo

Supposons donc $a \notin I$.

On a

$$\bigcap_{u \notin I} \mathscr{D}(u) \subseteq \mathscr{D}(a) \cap (\complement \mathscr{D}(a) \cup \mathscr{D}(b)) = \mathscr{D}(a \wedge b)$$

$$I \not\ni a \to b$$

$$F \ni a \to b$$

qed

Corollaire

Dans le cas fini, les conditions K et H sont équivalentes.
Dans le cas général, la condition K suffit pour appliquer le modus ponens, car le fait que $a \in F$ a pour effet de valider $a \to b$.

Conclusion

L'implication de Kripke peut être strictement plus faible que celle de Heyting. Néanmoins, le modus ponens ne s'en ressent pas. Soulignons que la prémisse a est utilisée deux fois : la première pour valider l'implication de Heyting depuis celle de Kripke, et la seconde pour le modus ponens lui-même.

L'introduction de l'implication de Heyting est une condition plus forte, mais elle ne change rien aux raisonnements et a l'avantage de pouvoir être intériorisée sous la forme d'un élément $a \to b \in \mathfrak{H}$.

Le passage Kripke-Heyting peut s'interpréter comme une dé-temporalisation, puisqu'il remplace une évolution temporelle par un calcul algébrique.

L'approche de Kripke est dynamique, elle introduit une temporalité, donc un infini potentiel.

La notion d'algèbre de Heyting s'inscrit dans une démarche similaire à celle de l'univers-bloc de la relativité générale, où le temps est fusionné avec l'espace en une variété achevée, un infini en acte.

Il n'est peut être pas inutile de remarquer que c'est la distributivité qui identifie les objets de *Frm* avec de ceux de *cHey* et autorise les conjonctions infinies. En aval, la différence entre les implications H et K provient du fait que $\mathscr{D}(\bigwedge_{k\in K} a_k) = Int(\bigcap_{k\in K} \mathscr{D}(a_k))$: $\mathscr{D}$ ne conserve pas forcément les implications infinies. Or il semble que la distributivité soit aussi en cause comme obstruction au passage de la logique classique à celle du quantique.

J.-P. Laedermann, le 15.12.23

Annexes

Implémentation C++

Projet : `SHE_2303.cc /`

`Heyting_workbench.cc (case 33)/ lattice.cc`

`void Lattice::KnonH ()`

La validité de l'implication de Kripke s'implémente en termes d'éléments premiers :

```
bool Lattice::imp_K (int e, int a, int b)
{
      int z_imp = true;

      for (int ip = 0; ip < PrEl_sz; ++ip) {
            int e1 = PrEl[ip];
            if (!leq (e1, e)) continue;
            if (!leq (a, e1) && leq (b, e1)) {
                  z_imp = false;
                  break;
            }
      }

      return z_imp;
}
```

Celle de Heyting est simplement `leq (imp (a, b), e);`

Equivalence $H = K$ vérifiée sur quelques dizaines d'algèbres finies au hasard.

Bibliographie

Intuitionistic Logic

Nick Bezhanishvili and Dick de Jongh Institute for Logic
n.bezhanishvili@uva.nl
https://staff.fnwi.uva.nl/n.bezhanishvili/

Language and Computation
Universiteit van Amsterdam

Bezhanishvili - Intuitionistic Logic 2006.pdf

Stone spaces

Peter T. Johnstone
P.T.Johnstone@dpmms.cam.ac.uk
https://www.dpmms.cam.ac.uk/person/ptj1000

Cambridge University Press 1986

Johnstone - Stone spaces 1982.pdf

Treillis distributifs et espaces spectraux, un petit dictionnaire

Henri Lombardi
henri.lombardi@univ-fcomte.fr
http://hlombardi.free.fr/

Université de Franche-Comté

Lombardi - Treillis distributifs et espaces spectraux, un petit dictionnaire 2020.pdf