Observables quantiques intuitionnistes

Jean-Pascal Laedermann
24 juillet 2025

(Ver 00)

0. Introduction

Dans un précédent papier [biblio 0], nous avons étendu la notion de probabilité aux algèbres de Heyting finies. Nous nous proposons ici de plonger cette structure dans le contexte de la logique quantique.

Ce plongement permettra de faire coexister des algèbres différentes dans le même espace, et d'introduire la non-commutativité des opérations de mesure.

1. Probabilité sur une algèbre de Heyting

Soit $\mathfrak{H}$ une algèbre de Heyting finie. On définit son *fond* par le sous-ensemble de propositions $G = \{\inf(F) \,|\, F \text{ filtre premier de } \mathfrak{H}\}$. Chaque élément $a \in \mathfrak{H}$ se décompose selon sa *base* $G\,.\,a = \{g \in G \,|\, g \leqslant a\}$. On obtient ainsi une représentation de l'algèbre comme topologie sur G dont les ouverts sont les $G\,.\,a$ [biblio 1]. Les connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$ se transforment en les opérations classiques sur les ensembles $\cup$, $\cap$. La relation d'ordre de l'algèbre devient l'inclusion ensembliste. L'ensemble G, muni de cette topologie est isomorphe au spectre de l'algèbre, et on a $a = \sup G\,.\,a$.

On place sur G une probabilité classique $\pi(g)$, i.e. $\sum_g \pi(g) = 1, 0 \leqslant \pi(g) \leqslant 1$.

Cette probabilité s'étend à toute l'algèbre en $\mu(a) = \pi(G\,.\,a)$.

2. Mesure quantique standard

Les deux notions fondamentales du formalisme quantique sont l'*état* et l'*observable*.

L'état ψ est représenté par un vecteur unitaire d'un certain espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Il évolue dans le temps selon l'équation de Schroedinger ou celle de Dirac [biblio 2].

L'observable est représentée par un opérateur hermitien U. Le théorème spectral donne la décomposition $U = \sum_{u \in Sp\,U} u\,J_u$, où $Sp\,U$ est le spectre de l'opérateur, qui contient les valeurs que peut prendre l'observable. Ce sont les valeurs propres de U. Les J_u sont les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces propres associés. Cet ensemble de projecteurs forme une *partition de l'identité* $Id_{\mathscr{H}} = \sum_u J_u$. On a $u \neq u' \Longrightarrow J_u J_{u'} = 0$.

Dans cette présentation, on associe à toute observable l'algèbre des propositions concernant son spectre. Pour la théorie quantique standard, cette algèbre est simplement l'ensemble des parties $\mathscr{P}(Sp\,U)$. A chaque proposition décrite par une partie du spectre $A \subseteq Sp\,U$ on fait correspondre le projecteur $J_A = \sum_{u \in A} J_u$.

A chaque paire (J, J') de projecteurs commutants du hilbert on associe le projecteur $J \wedge J'$ sur l'intersection de leurs sous-espaces, et $J \vee J'$ celui sur l'espace engendré par leur réunion. On montre facilement que $J \wedge J' = JJ'$ et $J \vee J' = J + J' - JJ'$. Ces connecteurs sont exactement les images des opérations ensemblistes sur le spectre : $J_{A \cup A'} = J_A \vee J_{A'}$, $J_{A \cap A'} = J_A \wedge J_{A'}$.

Une mesure sur un système quantique est simplement une question au sujet du spectre [biblio 3]. Si $A \subseteq Sp\,U$, la question A revient à demander « Est-ce que le système donnera une valeur $u \in A$ pour l'observable U ? ». La réponse est probabiliste. Si le système est dans l'état ψ, sa réponse sera *oui* avec avec une probabilité $p_A = \psi^\dagger J_A \psi$ et *non* avec une probabilité $p_{\complement A} = \psi^\dagger (Id - J_A)\psi$.

De plus, l'état se transforme en $\psi' = \dfrac{J_A\psi}{\sqrt{p_A}}$ dans le cas *oui*, et en $\psi' = \dfrac{J_{\complement A}\psi}{\sqrt{1-p_A}}$ dans cas *non*.

On remarque que poser la même question immédiatement après redonne la même réponse.

3. Mesure quantique intuitionniste

Le formalisme ci-dessus se généralise aisément au cas intuitionniste.

Une *observable quantique intuitionniste* U est introduite par son algèbre de propositions $\mathfrak{H}^U$, qui est cette fois une algèbre de Heyting. Le spectre de cette algèbre est traduit par une partition de l'identité sur le hilbert $\mathscr{H}$: $Id_{\mathscr{H}} = \sum_{g \in G} B_g$.

La probabilité sur le spectre est ensuite obtenue par $\pi(g) = \psi^\dagger B_g \psi$.

Les projecteurs B_g permettent alors d'associer un projecteur à chaque proposition de $\mathfrak{H}^U$ par $J_a = \sum_{g \leqslant a} B_g$, et on voit facilement que $\mu(a) = \psi^\dagger J_a \psi$ est une probabilité intuitionniste au sens ci-dessus.

On retrouve le cas standard si l'algèbre de Heyting est de Boole. En effet, la relation d'ordre sur le spectre est alors totalement déconnectée, et les *infs* des filtres premiers sont les atomes. La mesure quantique donne une issue de plus, car il peut très bien y avoir des propositions a dites *non-exhaustives* qui ne vérifient pas $a \vee \neg a = \top$.

Pour une question a, on obtient donc :

- une réponse *oui* avec une prob $\mu(a) = \psi^\dagger J_a \psi$
  et un état résultant $J_a\psi / \sqrt{\mu(a)}$
- une réponse *non* avec une prob $\mu(\neg a) = \psi^\dagger J_{\neg a} \psi$
  et un état résultant $J_{\neg a}\psi / \sqrt{\mu(\neg a)}$
- une *non-réponse* avec une prob $1 - \mu(a \vee \neg a)$
  et un état résultant $(Id - J_{a \vee \neg a})\psi / \sqrt{1 - \mu(a \vee \neg a)}$

Ces trois issues possibles correspondent aux valeurs de vérité de la proposition a, qui peut être *vraie* (réponse oui), *fausse* (non-a vraie, réponse non) ou *indécidable* (non-réponse).

Remarquons que le fait de poser une deuxième fois la question redonne le même résultat.

L'intérêt de cette construction est de permettre à plusieurs observables de s'intégrer au même état ψ. Il suffi de donner pour chaque observable une partition de l'identité associée au spectre de son algèbre. Les projecteurs d'une même observable commutent, mais ceux de deux observables différentes pas forcément. Néanmoins, il est possible que certains projecteurs de deux partitions commutent, ce qui donnerait un sens à des connecteurs $\vee$, $\wedge$ à cheval sur deux observables.

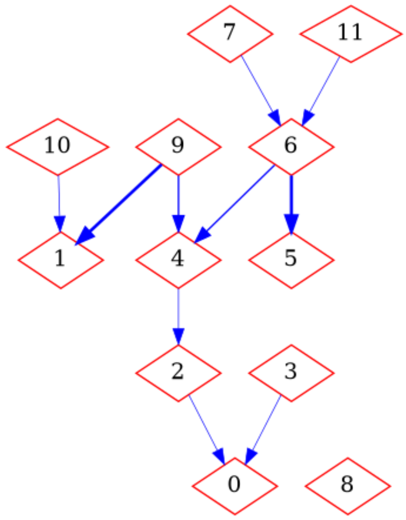
4. Exemple

Pour l'algèbre dont le spectre est représenté ci-contre, on a calculé les diverse probs de réponse *oui (gris)*, *indécidables (orange)* et *non (bleu)*.

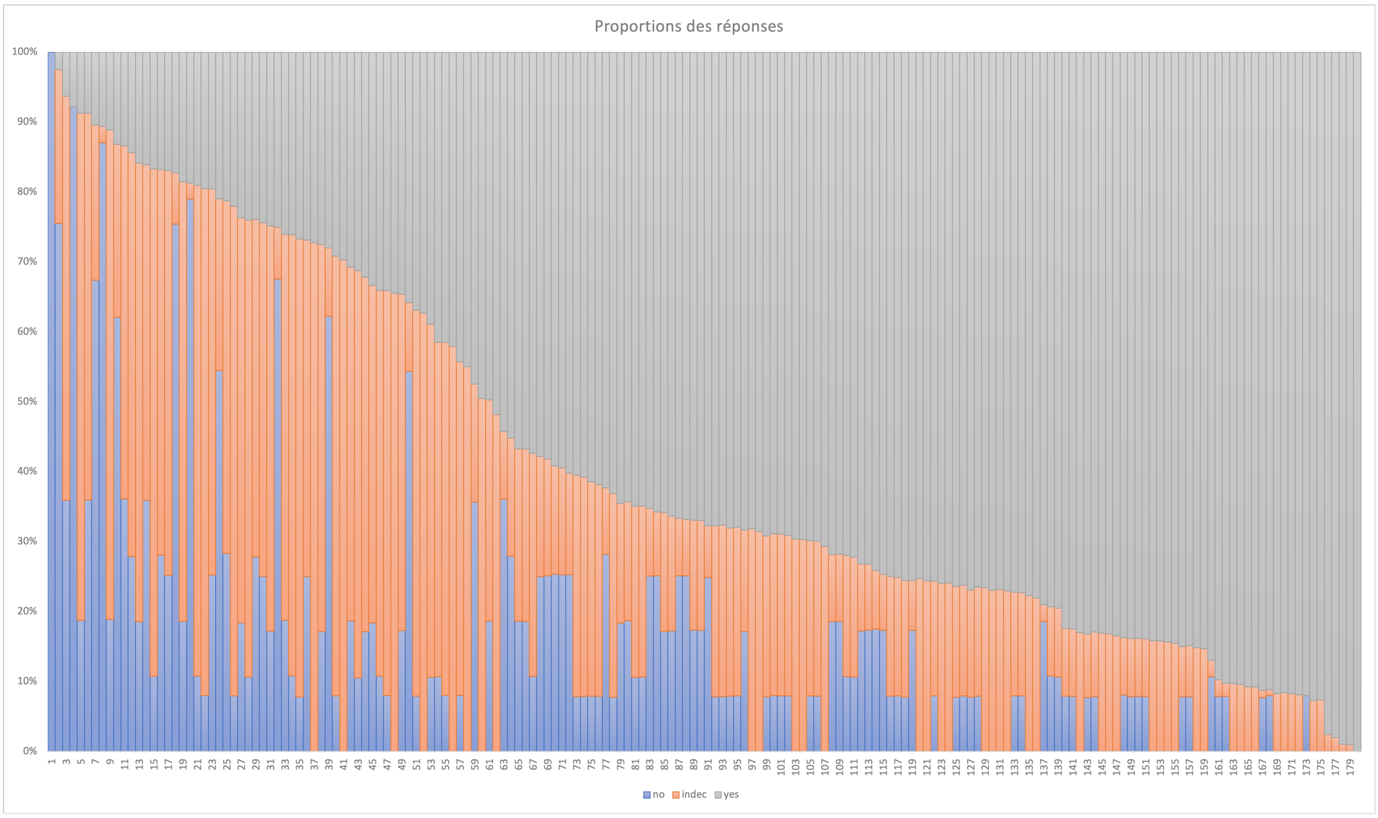
Les propositions sont classées par probabilités μ croissantes.

On remarque que la proportion de *nons* est généralement plus basse que celle des *ouis*. Ceci provient du fait que la négation n'est pas surjective.

Outre les deux éléments exhaustifs $\top$, $\bot$, on en trouve deux autres, qui apparaissent car l'algèbre est un produit (le spectre admet deux composantes connexes).



Obs_P_A Kripke DAG



5. Conclusion

Nous avons généralisé la notion de mesure quantique à des questions dont les réponses peuvent être indécidables. Chaque observable est devenue une partition de l'identité du hilbert qui est une fenêtre commutative sur l'espace de ses projecteurs orthogonaux. Ces fenêtres ne sont autres que des *contextes de Kochen-Specker* [biblio 4].

Le plongement des algèbres de Heyting définissant les observables dans l'espace de Hilbert a été rendu possible par le rapprochement de deux notions spectrales a priori très différentes : les spectres des algèbres de Heyting et ceux des opérateurs hermitiens.

Il faut souligner l'importance du découplage entre les ensembles de projecteurs propres et les valeurs propres associées. Le questionnement quantique se fait à travers ces ensembles, mais ne dépend pas des valeurs elles-mêmes.

Bibiographie

[0] J.-P. Laedermann

Probabilité et temporalité (https://laedus.org)

[1] Peter T. Johnstone

Stone Spaces (Cambridge)

[2] P.A.M. Dirac

The principles of Quantum mechanics (Snowball Publishing)

[3] Constantin Piron

Mécanique quantique (EPFL Press)

[4] S. Kochen et E. P. Specker

The problem of hidden variables in quantum mechanics
Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 17, n° 1, 1967