Probabilité et temporalité

Jean-Pascal Laedermann
11 juillet 2025

(Ver 04)

0. Introduction 3
1 Probabilité sur une algèbre de Heyting 3
1.1 Notations 3
1.2 Construction de la probabilité 4
2. Bayes revisité 5
2.1 Rappel 5
2.2 Transposition intuitionniste 5
3. Opérateur d'irrelevance 5
3.1 Relevance 5
3.1.1 Filtre d'irrelevance 6
3.1.2 Interprétation géométrique de l'implication 10
3.1.3 Interprétation temporelle d'opérateur d'irrelevance 10
4. Implémentation informatique 12
5. Conclusion 12
6. Bibiographie 13

0. Introduction

Le but de ce papier est d'étendre la notion de probabilité au cadre des algèbres de *Heyting*. Puis on présentera un opérateur très intéressant, qui pourrait jouer le rôle de moteur du temps.

On se place dans le cas des algèbres finies, sauf mention expresse du contraire.

1 Probabilité sur une algèbre de Heyting

1.1 Notations

Dans une algèbre de Heyting $\mathfrak{H}$ finie, les filtres et idéaux sont toujours principaux. On distingue deux sous-ensembles essentiels: G, constitué des *infs* des filtres premiers, qui seront nommées *fonds*, et E, qui contient les *éléments premiers*, i.e. les *sups* des idéaux premiers. Tout filtre premier étant le complémentaire d'un idéal premier, on obtient une bijection $\gamma : E \to G$, qui associe à l'élément premier e l'inf du filtre premier correspondant: $g = \gamma(e)$.

Les éléments de $\mathfrak{H}$ seront nommés *propositions*. Pour chaque $a \in \mathfrak{H}$, on définit sa *base* $G\,.\,a = \downarrow a \cap G$ et sa *co-base* $E\,.\,a = \uparrow a \cap E$. Le théorème de *Stone* affirme alors que les bases sont les ouverts d'un topologie isomorphe à $\mathfrak{H}$, et que les co-bases sont les fermés d'une topologie aussi isomorphe à $\mathfrak{H}$, les connecteurs étant définis pour l'ordre inverse. Autrement dit:

i) $\quad G\,.\,(a \vee b) = G\,.\,a \cup G\,.\,b \quad G\,.\,(a \wedge b) = G\,.\,a \cap G\,.\,b$

ii) $\quad E\,.\,(a \vee b) = E\,.\,a \cap E\,.\,b \quad E\,.\,(a \wedge b) = E\,.\,a \cup E\,.\,b$

On obtient les decompositions $\qquad a = \bigvee G\,.\,a = \bigwedge E\,.\,a$

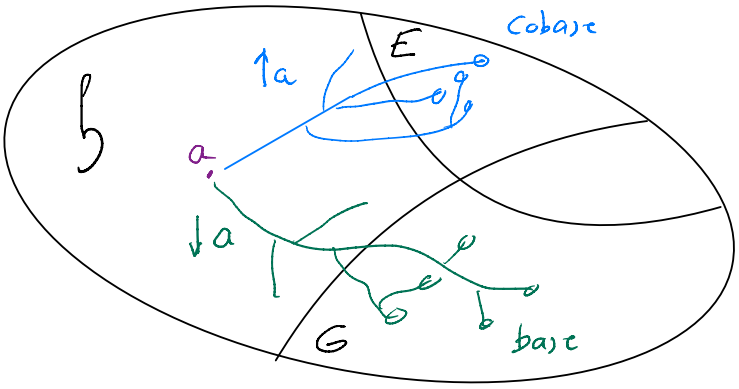

Fig.1 Bases et co-bases

L'ensemble G est nommé *G-spectre* de l'algèbre, et E est son *E-spectre*.

On montre facilement que γ est continue.

L'ordre sur le G-spectre est induit par celui de l'algèbre. Cet ordre suffit d'ailleurs à caractériser celui de l'algèbre tout entière, car on peut construire un isomorphisme entre l'algèbre et les antichaines du spectre.

1.2 Construction de la probabilité

La probabilité classique est définie sur une algèbre de Boole $\mathfrak{B}$. On commence par définir une fonction $\pi : GSp\,\mathfrak{B} \to [0,1]$, telle que $\sum_g \pi(g) = 1$, puis on l'étend à toute l'algèbre par $\pi(a) = \sum_{g \leqslant a} \pi(g)$. Comme le spectre est formé des atomes de $\mathfrak{B}$, on obtient en particulier $\pi(a) + \pi(\neg a) = 1$, ce qui est cohérent avec le fait que $a \vee \neg a = \top$

Une probabilité sur une algèbre de Heyting se définit de la même manière. On place une probabilité classique sur le spectre $\pi : GSp\mathfrak{H} \to [0,1]$, puis on l'étend à toute l'algèbre par $\mu(a) = \sum_{g \leqslant a} \pi(g)$. La différenciation entre π et μ est rendue nécessaire car l'ordre sur le spectre n'est plus totalement déconnecté, comme dans le cas booléen. En effet, μ et π ne coincident que sur les atomes, qui ne représentent plus tout le G-spectre.

On retrouve pour μ les relations essentielles exigées d'une probabilité:

$$\mu \geqslant 0$$
$$a \leqslant b \Longrightarrow \mu(a) \leqslant \mu(b)$$
$$\mu(\,\bot\,) = 0 \quad \mu(\,\top\,) = 1$$
$$\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$$

La définition de μ peut s'écrire matriciellement: $\mu_a = \sum_g \pi_g O_a^g$. Si l'on restreint les indices a à G, on obtient $\mu_g = \sum_{g'} \pi_{g'} O_g^{g'}$. Il se trouve que cette matrice-là est inversible, ce qui permet de retrouver facilement π depuis μ.

On remarque que $\mu(a) = \pi(G\,.\,a)$.

Ls structure d'algèbre de Heyting est exactement celle qui est nécessaire pour décrire la logique dite intuitionniste. Ces probabilités seront donc aussi qualifiées d'*intuitionistes*.

Muni de cette définition, on récupère deux concepts essentiels. Tout d'abord celui de *probabilité conditionnelle*: $\mu(a\,|\,b) = \dfrac{\mu(a \wedge b)}{\mu(b)}$, puis celui d'*information* $Info(a) = -\log_2 \mu(a)$, qui seront utiles plus loin. Comme μ est croissante, on voit que les propositions hautes de l'algèbre contiennent moins d'information que les basses. Ceci traduit bien le fait que la relation d'ordre va vers le général. En particulier, $\mu(\,\top\,) = 0$, car il n'y a rien à prouver, et $\mu(\,\bot\,) = \infty$, ce qui suggère qu'il faudrait une information infinie pour valider l'absurde.

2. Bayes revisité

Le formalisme bayésien permet une réinterprétation des espaces G et $\mathfrak{H}$.

2.1 Rappel

La théorie bayésienne de la décision statistique distingue deux espaces: celui des états Θ d'un système, et celui des observations X sur ce système. Lors d'une mesure, si l'état du système est θ, sa réponse est donnée par une *probabilité de transition* connue $p(dx \mid \theta)$.

L'observateur a une certaine connaissance de l'état sous la forme d'une répartition *a priori*. Lorsqu'il reçoit la réponse x, il peut actualiser cet a priori en un *a posteriori* par la formule bien connue :

$$p(d\theta \mid x) = \frac{p(dx \mid \theta)p(d\theta)}{M(dx)}$$

où $M(dx) = \int_\Theta p(dx \mid \theta)p(d\theta)$ est dite *marginale* sur les observations.

2.2 Transposition intuitionniste

Afin d'établir une correspondance entre la formule de Bayes et la définition de la probabilité intuitionniste, il convient de remarquer que les variables intervenant dans cette dernière sont des propositions, et non pas des différentielles. Reformulons donc l'a posteriori bayésien en termes de parties non infinitésimales.

Soient $\Gamma \subseteq \Theta$ et $A \subseteq X$, on a $p(\Gamma \mid A) = \dfrac{\int_\Gamma p(A \mid \theta)p(d\theta)}{M(A)}$.

Cette expression correspond à la relation intuitionniste $\pi(g \mid G\,.\,a) = \dfrac{O_a^g \pi(a)}{\mu(a)}$.

Ceci suggère de faire de G un espace d'états et de $\mathfrak{H}$ un espace d'observations, ce qui conduit à un a priori $\pi(g)$, un a posteriori $\pi(g \mid G\,.\,a)$ et une marginale $\mu(a)$. La relation d'ordre joue ici le rôle de réponse du système.

Il faut souligner une différence essentielle entre les deux modèles. La réponse bayésienne et une valeur observée, alors que la réponse intuitionniste est binaire: O_a^g vaut 1 si $a \geqslant g$, 0 sinon.

3. Opérateur d'irrelevance

Nous avons introduit plus haut l'application $\gamma : E \to G$ par $\uparrow \gamma(e) = \complement \downarrow e$. Le but de ce chapitre est de l'étendre à $\mathfrak{H}$.

3.1 Relevance

Définition

$Rel_a(y) = y \to a$ est la *relevance* d'une proposition y au sujet d'une proposition a.

Propriétés

On sait que $a \leqslant y \to a \leqslant \top$.

La relevance de y est donc minimale si $y \to a = a$. Dans ce cas y est non-relevante au sens courant pour valider a. En effet, si l'on utilise le *modus ponens* pour prouver a à l'aide de y, on s'appuie sur la loi $y \wedge (y \to a) \leqslant a$. Il faut prouver y et $y \to a$. Si l'on sait que $y \to a = a$, on n'a pas besoin de y.

Si elle est maximale, on a $Rel_a(y) = \top$ donc $y \leqslant a$ et y valide automatiquement a.

La *valeur de la relevance* de y au sujet de a est donnée par

$$VR_a(y) = Info(a \,|\, y \to a) = -\log_2 \mu(a \,|\, y \to a)$$

Si la relevance est minimale, sa valeur est nulle car on a $y \to a = a$.
Si elle est maximale, sa valeur est $Info(a)$.

On voit facilement que $VR_a(y) = Info(a) - Info(y \to a)$

3.1.1 Filtre d'irrelevance

Soit $C_0(a) = \{y \,|\, y \to a = a\}$ l'ensemble des propositions irrelevantes pour a.
Elles vérifient donc $VR_a(y) = 0$.

Lemme

$C_0(a)$ est un filtre.

Demonstration

Si $y \in C_0(a)$ et $y' \geqslant y$, on a $y' \to a \leqslant a$. Or $a \leqslant y \to a$ redonne l'égalité.
Si $y, y' \in C_0(a)$, il vient $y \to a = a, y' \to a = a \Longrightarrow (y \wedge y') \to a = a$.

qed

Comme nous sommes dans le cas fini ce filtre admet un infimum.

Posons donc $\nu(a) = \bigwedge \{y \,|\, y \to a = a\}$, ce qui définit l'*opérateur d'irrelevance*.

C'est l'axiome de fond des propositions irrelevantes pour a. $\nu(a)$ est la proposition irrelevante à information maximale.

Proposition

i) $\nu : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ est une extension de $\gamma : E \to G$
ii) ν est bijective
iii) Si l'algèbre est booléenne $\nu = \neg$

iv) $\nu_\exists \circ E. = \complement_G \circ G.$
v) $\overset{-1}{\nu} \circ G. = \complement_E \circ E.$
vi) $E.(a \to b) = Adh(\nu^{-1}G.a \cap E.b)$
vii) $G.(a \to b) = Int(\nu_\exists E.a \cap G.b)$
viii) $a \to b = \bigwedge \nu^{-1}G.a \cap E.b = \bigvee \nu_\exists E.a \cap G.b$

Lemme

$\gamma(e) \to e = e$

Demonstration

$\gamma(e) \to e = \bigvee \{h \,|\, \gamma(e) \wedge h \leqslant e\}$. $\gamma(e) \nleqslant e$ car $\mathfrak{H} = \uparrow \gamma(e) + \uparrow e$.
Comme $\downarrow e$ est un idéal premier, $\gamma(e)$ ou h doivent y appartenir, donc $h \leqslant e$ et
$\bigvee \{h \,|\, \gamma(e) \wedge h \leqslant e\} \leqslant \bigvee \{h \,|\, h \leqslant e\} = e$. Mais alors $e \leqslant \gamma(e) \to e$ donne l'égalité.

qed

Démonstrations

i)

Il faut montrer que $\bigwedge \{y \,|\, y \to e = e\} = \gamma(e)$ si $e \in E$.
Le lemme donne immédiatement $\leqslant$.
Rappelons que $\gamma(e) = \bigwedge \complement \downarrow e$. Montrons que $C_0(e) \subseteq \complement \downarrow e$, ce qui donnera l'inégalité inverse.
Par l'absurde, si $a \to e = e$ et $a \leqslant e$, on a $a \to e = \top$ et $e = \top$, ce qui est impossible car les idéaux premiers sont propres.

ii)

On a $a = \bigwedge_{e \geqslant a} g$. Les e intervenants sont dans la co-base de a. Or il suffit d'effecteur la
conjonction sur les éléments minimaux de l'ensemble $\{e \geqslant a\}$, que l'on nommera *sa cobase stricte*

$$a = \bigwedge_{e' \in Min(e \geqslant a)} e'.$$

Le résultat est que l'on peut exprimer ν directement par les valeurs de γ sur cet ensemble. On obtient

$$\nu(a) = \bigvee_{e' \in Min(e \geqslant a)} \gamma(e').$$

Or γ est une bijection de E vers G, et Min caractérise a, donc ν est injective.
Comme on est dans le cas fini, elle est automatiquement bijective.

iii)

Dans une algèbre de Boole, l'implication prend la forme $y \to a = \neg y \vee a$.
Traduisons la définition de $\nu(a) = \bigwedge \{y \,|\, y \to a = a\}$:
$y \to a = a \iff \neg y \vee a = a \iff \neg y \leqslant a \iff y \geqslant \neg a$.
L'infimum donne bien $\neg a$.

iv) à viii)

Ces relations se lisent sur le diagramme commutatif de la Fig. 3 dans le cas particulier de la négation. Ceci est facilement généralisable à l'implication.

Remarques

Cl est mis pour fermé, et Op pour ouvert.

La notation $\nu_\exists$ est simplement l'extension de ν aux parties. C'est l'adjointe à gauche de $\overset{-1}{\nu}$.

ν entretient une relation complexe avec la négation et le complémentaire.

ν généralise de manière naturelle la dualité entre filtres et idéaux premiers aux filtres et idéaux quelconques. S'ils sont premiers, le *Hinterland* de la Fig. 2 est vide.

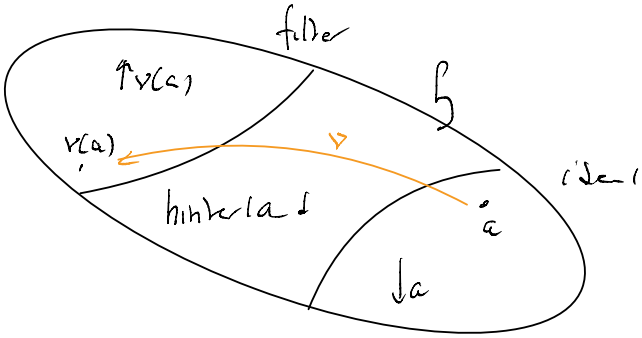

Fig. 2 Opérateur d'irrelevance

Définissons la relevance relative par $VRr_a(y) = VR_a(y)/Info(a)$. Le filtre $\uparrow \nu(a)$ donne $VRr = 0$, l'idéal $\downarrow a$ donne $VRr = 1$. L'hinterland donne des valeurs intermédiaires. Si $a \in E$, VRr ne prend que les valeurs 0 ou 1.

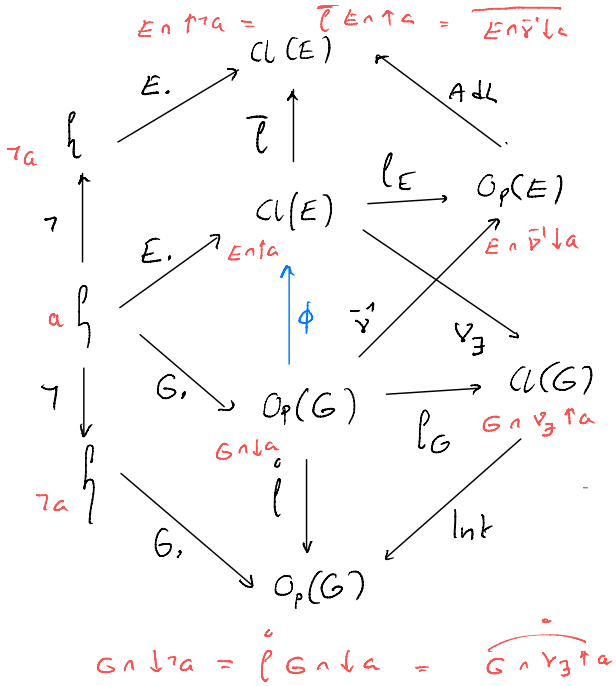

Fig. 3 Relations entre les topologies

3.1.2 Interprétation géométrique de l'implication

Reprenons viii) $a \to b = \bigwedge \nu^{-1} G\,.\,a \cap E\,.\,b = \bigvee \nu_{\exists} E\,.\,a \cap G\,.\,b$.
Depuis a, on obtient sa base $G\,.\,a$ que l'on transporte dans E par ν^{-1}. L'intersection de cette image avec la cobase de b donne un sous-ensemble de E, dont l'inf est $a \to b$.

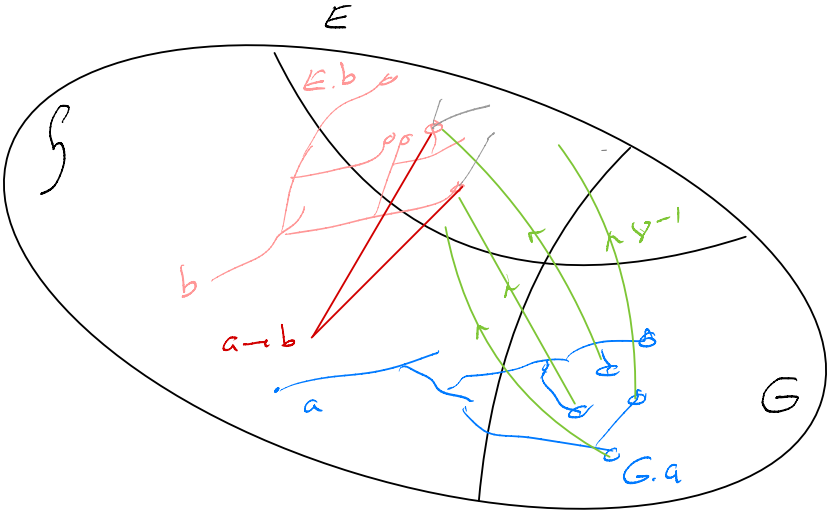

Fig. 4 Implication

Les traces en grisé complètent l'adhérence de cette intersection. L'inf n'est pas influencé par cet ajout.

3.1.3 Interprétation temporelle d'opérateur d'irrelevance

Si a est l'axiome de fond d'une réalité actuelle, l'irrelevance fait de $\nu(a)$ un candidat idéal pour un instant postérieur. En effet, le futur doit être irrelevant en regard du présent.

Le fait que ν soit bijective implique qu'il existe des orbites temporelles dans les algèbres de Heyting.

L'évolution $a \rightsquigarrow \nu(a)$ est maximale en ce sens que l'instant suivant valide toutes les propositions irrelevantes de l'instant présent. D'une manière moins extrême, toute évolution $a \rightsquigarrow a'$ doit satisfaire $a' \geqslant \nu(a)$. $\uparrow \nu(a)$ peut être considéré comme l'ensemble des successions potentielles de a.

Exemple

L'algèbre de la Fig. 5 a été produite par le code présenté à la section 4.

On remarque que l'algèbre est stratifiée, ce qui est toujours le cas. Chaque strate est d'une seule couleur. Les éléments premiers sont caractérisés par une seule flèche sortante en bleu ou rouge. Les fonds n'ont qu'une seule flèche entrante en vert ou rouge. Il existe des fonds qui sont aussi des éléments premiers.

Les orbites de la Fig. 6 présentent les itérations $\nu^t(a)$ depuis une proposition donnée. Les noeuds ont la couleur de leur strate.

L'algèbre est générée depuis les antichaines du spectre. Ceci explique la numérotation chaotique des noeuds du diagramme de Hasse.

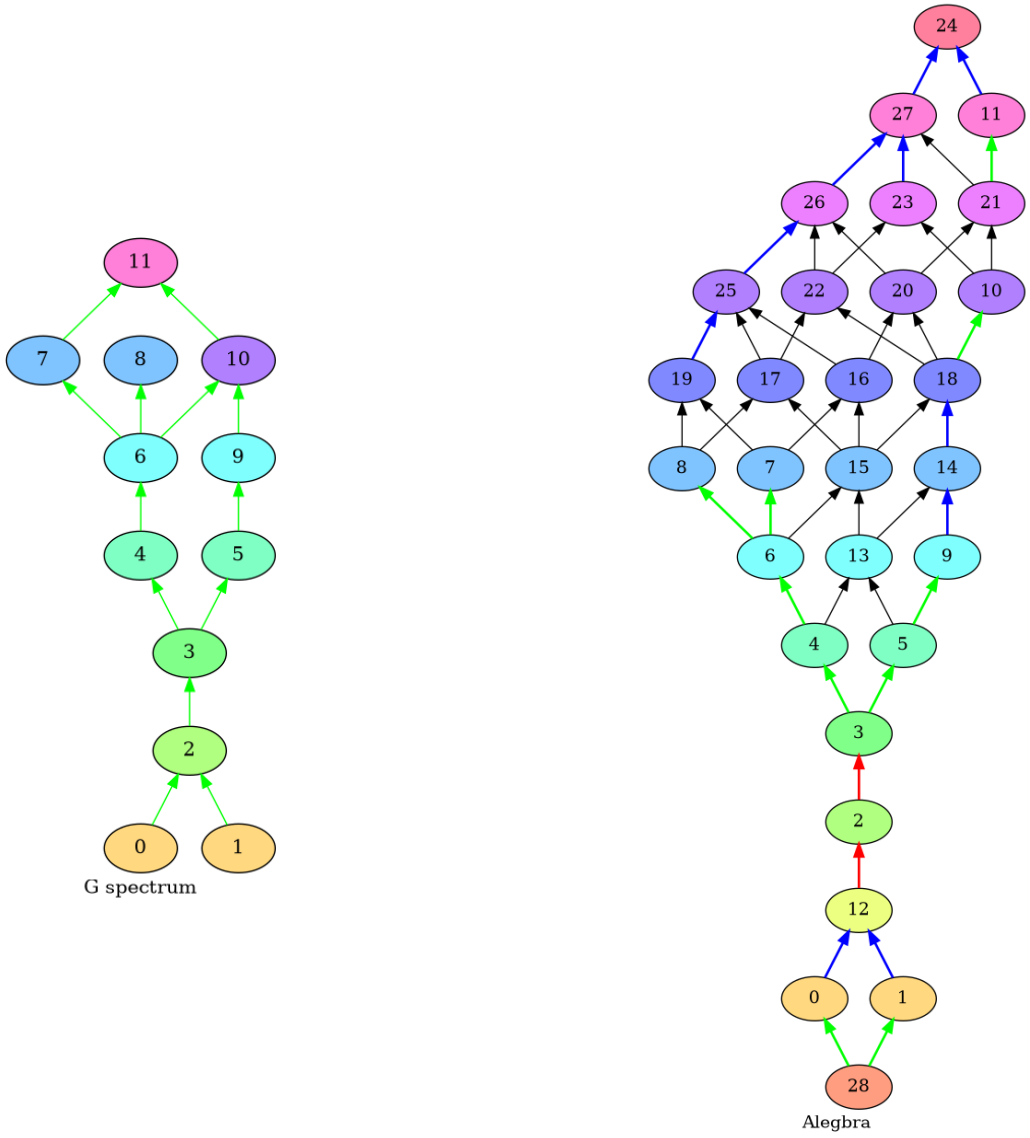

Fig. 5 Une algèbre de Heyting et son spectre

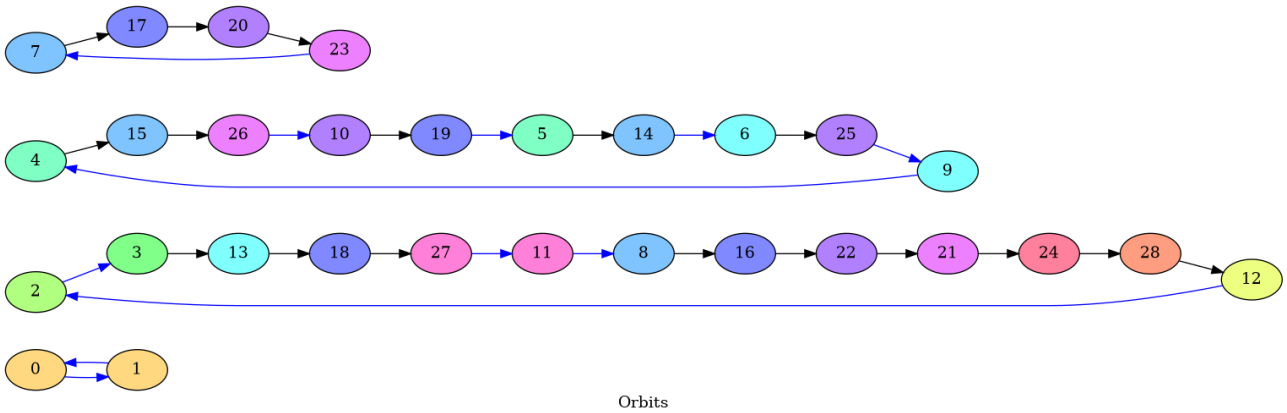

Fig. 6 ν-orbites

4. Implémentation informatique

Toutes les affirmations présentées ici ont été testées par ordinateur sur de nombreuses algèbres de *Heyting* aléatoires.

La construction d'une telle algèbre se fait en deux étapes. Premièrement, on génère un ordre quelconque à l'aide d'une matrice aléatoire diagonale supérieure Tr dont les coefficients sont 0 ou 1, et de diagonale nulle. Ceci fournit un générateur d'ordre strict. On en tire un ordre par $O = \min(\mathbf{1}, \sum_{k=0}^{\infty} Tr^k)$, où $\mathbf{1}$ est une matrice formée exclusivement de 1. On sait que les antichaines d'un ordre, muni de l'opération $\alpha \vee \beta = Max\{\alpha \cup \beta\}$ et de la relation d'ordre $\alpha \leqslant \beta$ donnée par $\alpha \vee \beta = \beta$ est un treillis distributif dont le G-spectre est l'ensemble des singletons. Comme nous sommes dans le cas fini, c'est automatiquement une algèbre de *Heyting*.

5. Conclusion

Le problème de la définition d'une probabilité pour une logique qui admet le tiers exclu bute sur la nécessité booléenne d'avoir $\pi(a \vee \neg a) = 1$. Nous espérons avoir apporté une construction qui contourne ce problème.

L'opérateur d'irrelevance réalise une troublante généralisation de la négation. L'idée d'en faire un moteur du temps s'inspire du dieu grec *Chronos*, qui, sous la forme de *Saturne*, mange ses propres enfants.

Le passage au cas infini fait apparaître la dissymétrie fondamentale de la définition des topologies, qui admettent des réunions quelconques d'ouverts, mais seulement des intersections finies. Les idéaux premiers restent principaux, mais ce n'est généralement pas le cas pour les filtres. Une extension de ν fera l'objet d'une autre publication. Il est possible de définir une probabilité intuitionniste en passant par les éléments premiers E, qui existent toujours. On place sur cet ensemble une probabilité $\bar{\pi}(e)$ et on construit $\mu(a) = 1 - \int_{e \geqslant a} \bar{\pi}(de)$. Remarquons que dans le cas fini, ce détour correspond à se donner $\bar{\pi}(e) = \pi(\nu(e))$.

L'évolution décrite par l'itération de ν peut être modifiée par la présence d'un *champ de propositions* sur l'algèbre $\phi : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$. L'itération dans un champ disjonctif $a \rightsquigarrow \phi(a) \vee \nu(a)$ provoque une perte d'information. Cette évolution préserve l'irrelevance du futur. D'autres possibilités consistent à introduire un champ conjonctif $a \rightsquigarrow \phi(a) \wedge \nu(a)$, qui ajoute une hypothèse, ou un champ implicatif $a \rightsquigarrow \phi(a) \to \nu(a)$, qui en soustrait une.

Le retour de la logique intuitionniste a eu lieu, paradoxalement, dans le domaine ultra-booléen de l'informatique. Il existe en effet des programmes qui ne donnent pas de réponse: ceux qui ne se terminent pas. Un théorème de Turing nous dit qu'il n'existe aucun algorithme qui puisse tester si un programme se termine ou non. L'indécidable revient en même temps que le tiers, que l'on avait exclu un peu trop tôt …

6. Bibiographie

Ian Chiswell

Mathematical Logic (Oxford)

Peter T. Johnstone

Stone Spaces (Cambridge)

Jorge Picado, Aleš Pultr

Frames and Locales (Springer)

B.A. Davey, H.A.Pristley

Introduction to Lattices and Order (Cambridge)

Henri Lombardi

Treillis distributifs et espaces spectraux (Lab. Math. Besançon)

J. M. Bernardo, Adrian F. Smith

Bayesian Theory (Wiley)

A.M. Yaglom, I.M. Yaglom

Probabilité et information (Wiley)