Produits et quotients d'algèbres de Heyting

Jean-Pascal Laedermann
24 août 2025

(Ver 00)

0 Introduction 3
1 Produit 3
1.1 Définition et propriétés 3
1.2 Probabilité 3
2 Quotient 4
2.1 Définition et propriétés 4
2.2 Probabilité 5
3 Factorisation 5
4 Approximation 7
5 Mesure 7
6 Prévisibilité 8
7 Conclusion 10

0 Introduction

Les algèbres de Heyting (AH) peuvent être des produits et des quotients par des filtres. Ce papier propose d'examiner de plus près la relation entre ces deux notions.

On ne traite ici que des algèbres finies. Dans ce cas, tout treillis distributif est une algèbre de Heyting. Néanmoins, les homomorphismes de treillis distributifs ne conservent pas forcément l'implication.

La donnée d'un filtre de validation ϕ désigne les propositions qui sont vraies. L'algèbre quotient créée une partition de l'algèbre de départ en classes dont les éléments sont considérés comme égaux modulo ϕ. Ces classes sont les valeurs de vérité associées aux propositions originales. L'ordre de l'algèbre quotient ordonne ainsi ces valeurs. Par exemple, la valeur maximale est la classe de $\top$ (vrai) qui se trouve être ϕ lui-même, et la valeur minimale la classe de $\perp$ (faux) qui est l'mage de ϕ par la négation. Est définie comme fausse une proposition dont la négation est vraie. Les propositions qui sont ni vraies ni fausses sont dites indécidables. Si ϕ est un ultrafiltre, on se retrouve dans la situation classique, où il n'y a pas de tiers exclu, i.e. pas d'indécidabilité.

1 Produit

1.1 Définition et propriétés

Définition

Soient $\mathfrak{H}_0$ et $\mathfrak{H}_1$ deux AH. On définit la relation d'ordre sur $\mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{H}_1$ par
$(a_0, a_1) \leqslant (b_0, b_1) \Longleftrightarrow a_0 \leqslant b_0 \ et \ a_1 \leqslant a_1$

Proposition

Muni de cette relation, le produit est bien un treillis distributif pour les connecteurs définis par $(a_0, a_1) \wedge (b_0, b_1) = (a_0 \wedge b_0, a_1 \wedge b_1)$ et $(a_0, a_1) \vee (b_0, b_1) = (a_0 \vee b_0, a_1 \vee b_1)$.

De plus, on a $(a_0, a_1) \rightarrow (b_0, b_1) = (a_0 \rightarrow b_0, a_1 \rightarrow b_1)$

Ceci se généralise aisément à un nombre quelconque (fini) d'algèbres.

1.2 Probabilité

Une probabilité sur un produit d'AH peut être donnée par des probabilités sur ses facteurs et une pondération.

Soient $\mathfrak{H} = \prod_{i \in I} \mathfrak{H}_i$ et une probabilité μ_i sur chaque $\mathfrak{H}_i$ induite par π_i sur G_i.
Une pondération w sur I induit alors une probabilité sur la somme disjointe $G = \sum_i G_i$ par

$\pi = \sum_i w_i \pi_i$, où l'on a étendu π_i aux autres indices par 0.

π donne alors μ sur $\mathfrak{H}$ par l'extension standard $\mu(a) = \sum_{g \in G, g \leqslant a} \pi(g)$.

Proposition

$$\mu(a) = \sum_i w_i \mu_i$$

On remarque que ce n'est pas un produit de probabilités.

2 Quotient

2.1 Définition et propriétés

Soit F un filtre sur $\mathfrak{H}$ et la relation donnée par $a \overset{F}{\sim} b \iff \exists w \in F \,.\, w \wedge a = w \wedge b$.

Comme les AH sont finies, tous les filtres principaux. Soit donc $\phi = \bigwedge F$.

Proposition

C'est une relation d'équivalence qui peut s'écrire

$$\begin{gathered} a \overset{\phi}{\sim} b \\ [a]_\phi = [b]_\phi \\ \phi \leqslant a \leftrightarrow b \\ \phi \wedge a = \phi \wedge b \\ \phi \to a = \phi \to b \\ \phi \wedge a \leqslant b \leqslant \phi \to a \\ \phi \wedge b \leqslant a \leqslant \phi \to b \end{gathered}$$

Les deux dernières expressions vont servir à représenter le quotient $\mathfrak{H} \,|\, F$ dans $\mathfrak{H}$ elle-même.

Définition

Un intervalle $[a, b]$ d'une AH est défini par le sous ensemble $\{y \in \mathfrak{H} \,|\, a \leqslant y \leqslant b\}$

Proposition

Les classes d'équivalence $\mathfrak{H} \,|\, F$ sont les intervalles $[a]_\phi = [\phi \wedge a, \phi \to a]$.

Toute relation d'équivalence se traduit par une partition de l'espace source.
Ici, on obtient une partition de l'algèbre en intervalles.

On choisira dans chaque classe son maximum comme représentant standard.

La conjonction et l'implication de $\mathfrak{H}$ définissent directement celles du quotient car
$(\phi \to a) \wedge (\phi \to b) = \phi \to (a \wedge b)$ et $(\phi \to a) \to (\phi \to b) = \phi \to (a \to b)$.

La disjonction nécessite un transport par $(\phi \to a) \vee_\phi (\phi \to b) = \phi \to (a \vee b)$.

2.2 Probabilité

Soit b une proposition quelconque de probabilité non-nulle. La *probabilité conditionnelle* est définie de la même manière que dans le cas classique, i.e.

$$\mu(a \mid b) = \frac{\mu(b \wedge a)}{\mu(b)}$$

Proposition

Si μ est une probabilité sur $\mathfrak{H}$ et ϕ le fond d'un filtre, alors la probabilité image sur le quotient est donnée par

$$(\mu \mid \phi)([a]_\phi) = \mu(a \mid \phi)$$

Remarquons que les minima des classes servent à définir une probabilité sur le quotient, alors que les maxima des classes servent à les identifier.

$\mu \mid \phi$ donne la répartition cumulée des valeurs de vérité induites par ϕ. Celle-ci est générée par la probabilité classique $\pi \mid \phi$ sur son fond qui peut être calculée en inversant la matrice de la relation d'ordre.

3 Factorisation

Soient $\mathfrak{H}$ une AH et G le sous-ensemble de ses fonds. On munit G de la relation d'ordre induite par $\mathfrak{H}$. Deux éléments de G seront dit *connectés* s'il existe une suite d'éléments comparables qui mène de l'un à l'autre. Désignons par $(G_k)_{k \in K}$ ses composantes connexes.

Définitions

Un élément de $a \in \mathfrak{H}$ sera dit *exhaustif* ssi $a \vee \neg a = \top$
Les composantes de a sont données par $a_k = \bigvee_{g \leqslant a, g \in G_k} g$
Les axes de $\mathfrak{H}$ sont donnés par $A\,x_k = \{a_k \mid a \in \mathfrak{H}\}$

Remarquons que les éléments exhaustifs sont réguliers, mais que la réciproque n'est pas forcément vraie.

Proposition

$$a = \bigvee_{k \in K} a_k$$
$$a_k = a \wedge \bigvee A\,x_k$$

Les axes sont des intervalles de minimum $\perp$.

Les éléments minimaux de l'ensemble des exhaustifs sont les maxima des axes.

$$\mathfrak{H} \simeq \prod_k \mathfrak{H} \mid \max A\, x_k$$

Remarques

Les composantes apparaissent comme projections.

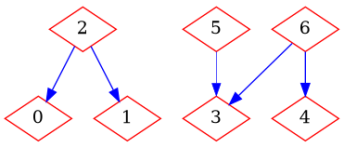
On comprend mieux pourquoi le construction de la probabilité produit donne une somme pondérée. Pour retrouver la définition standard, il faut définir une autre produit : le tensoriel.

Exemple

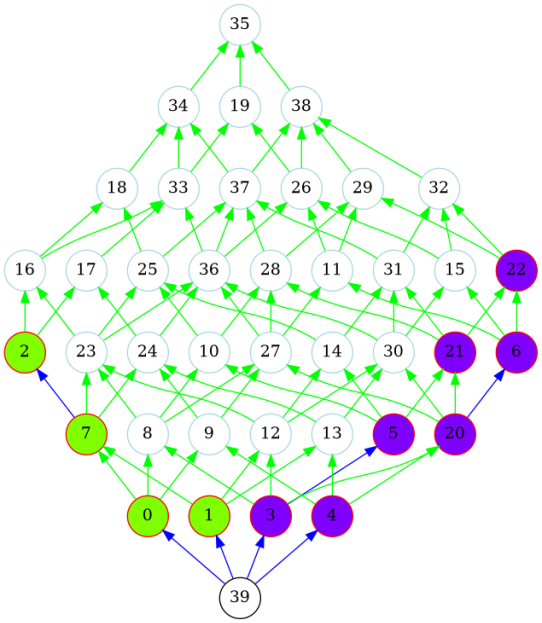
Depuis le fond à trois composantes connexes suivant :

On obtient l'algèbre ci-dessous et ses quotients par les exhaustifs 2 et 22.

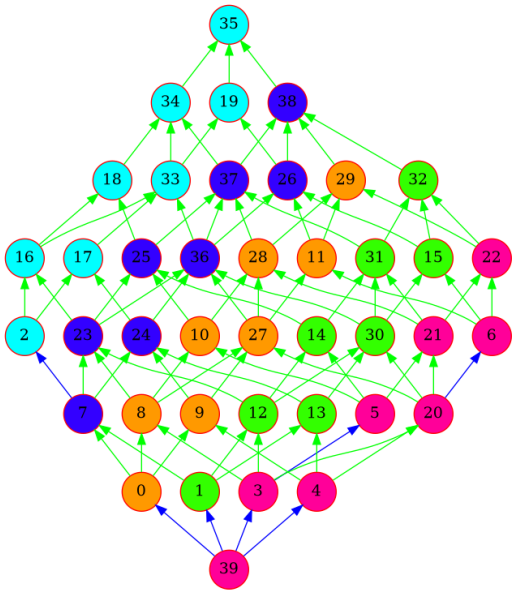
Les axes et les classes d'équivalence ont une couleur commune.



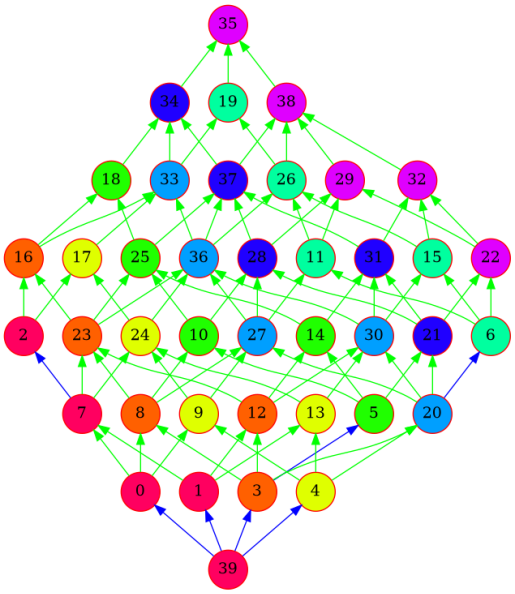
product Kripke DAG



product Algebra



product stratification sup ax 2



product stratification sup ax 22

4 Approximation

Pour un filtre donné $\phi \subseteq \mathfrak{H}$, on obtient donc comme classes d'équivalence les intervalles

$$[\phi \wedge a, \phi \to a] \quad a \in \mathfrak{H}$$

On peut dès lors considérer que l'intervalle $[\phi \wedge a, \phi \to a]$ est une **approximation** de a au niveau ϕ. Elle est meilleure lorsque ϕ est grand. Par exemple, les intervalles résultants de $\phi = \top$ sont les singletons.

Proposition

$[a, b] \cap [c, d] = [a \vee b, c \wedge d]$

Corollaire

$[\phi \wedge a, \phi \to a] \cap [\xi \wedge a, \xi \to a] = [(\phi \vee \xi) \wedge a, (\phi \vee \xi) \to a]$

I.e. la superposition d'approximations d'ordre ϕ et ξ donne une approximation d'ordre $\phi \vee \xi$.

5 Mesure

Supposons que le système ait validé la question $?\phi$, ce qui se produit avec la probabilité $p_0 = \psi_0^\dagger J_\phi \psi_0$ si ψ_0 est son état initial. L'observateur se trouve alors devant une nouvelle algèbre $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \,|\, \phi$, munie d'une prob $\mu_1([a]_\phi) = \mu(a \,|\, \phi)$ et le nouvel état de système $\psi_1 = \dfrac{J_\phi \psi_0}{\sqrt{p_0}}$est dans le sous-espace $Im\, J_\phi$. Cette réduction a pour effet de rendre équivalentes les propositions d'une même classe $[a]_\phi = [\phi \wedge a, \phi \to a]$. Comme $J_a J_\phi = J_{\phi \wedge a} = J_{\phi \wedge (\phi \to a)}$, la projection de tous les éléments de la classe de a par J_ϕ collapse. Enfin $\mu_1([a]_\phi) = \dfrac{\psi_0^\dagger J_{\phi \wedge a} \psi_0}{\psi_0^\dagger J_\phi \psi_0} = \psi_1 J_a \psi_1$, et on a la

Proposition

Si $?\phi$ a été validée par un système dans l'état ψ_0, alors, après la mesure :

L'algèbre est réduite à $\mathfrak{H} \,|\, \phi$
L'espace de Hilbert devient $Im\, J_\phi$.
Les projecteurs associés aux classes sont $J_{[a]_\phi} = J_\phi^\dagger J_a J_\phi = J_a J_\phi$.
L'état du système est $\psi_\phi = \dfrac{J_\phi \psi_0}{\sqrt{p_0}}$ avec $p_0 = \psi_0^\dagger J_\phi \psi_0$.
La probabilité résultante est $\mu_\phi([a]_\phi) = \sqrt{\psi_\phi^\dagger J_a \psi_\phi}$

En d'autre termes, si $K_\phi : a \mapsto [a]_\phi$ et $\mu \,|\, \phi(a) = \mu(a \,|\, \phi)$,

les transformations $K \to J \to |$ sont naturelles.

Le conditionnement par une réponse positive à une question donne donc le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J"] \arrow[d, "K_\phi"'] & J_a \arrow[r, "\psi_\cdot"] \arrow[d, "J_\phi."] & \langle\psi|J_a|\psi\rangle \arrow[d, "|\phi"] \\
\mathfrak{h}|\phi \arrow[r, "J"] & J(\mathrm{Im}\, J_\phi) \arrow[r, "\psi_\cdot"] & \mathbb{R} \quad \mu(a|\phi) \\
[a]_\phi & J_\phi^+ J_a J_\phi & \langle\psi|J_\phi^+ J_a J_\phi|\psi\rangle \\
 & & = \\
 & & \langle\psi_\phi|J_a|\psi_\phi\rangle
\end{tikzcd}
$$

Comme $\xi \to (\phi \to a) = (\xi \wedge \phi) \to a$, la composition verticale de deux tels diagrammes revient à une conjonction. Par exemple $K_\xi \circ K_\phi = K_{\xi\wedge\phi}$

6 Prévisibilité

Dans un précédent article nous avons défini l'opérateur d'irrelevance ν, qui est intimement lié à la notion de moteur du temps. Nous montrons ici qu'il permet de relier les algèbres-quotient à la prévisibilité.

L'ensemble d'irrelevance associé à un filtre $\uparrow \xi$ est donnée par $Irrel(\xi) = \{y \,|\, y \to \xi = \xi\}$. C'est aussi un filtre qui peut être caractérisé par l'opérateur $\nu : \xi \mapsto \bigwedge \{y \,|\, y \to \xi = \xi\}$, donc $Ireel(\xi) = \uparrow \nu(\xi)$. On introduit ensuite l'ensemble dual $Irrel^*(\phi) = \{x \,|\, \phi \to x = x\}$.

Supposons que l'état d'un système actuel soit ξ. Le pas temporel $\phi = \nu(\xi)$ révèle plusieurs relations intéressantes.

Proposition

i) $\quad Irrel^*(\phi) = \overset{-1}{\nu}(\downarrow \phi)$

ii) $\quad Irrel^*(\phi)$ est isomorphe à $\mathfrak{H}\,|\,\phi$

Demo

i) $\quad x \in \overset{-1}{\nu}(\phi) \iff \nu(x) \leqslant \phi \iff \phi \to x = x$

ii)

Soient $\iota : \overset{-1}{\nu}(\downarrow \phi) \to \mathfrak{H} \,|\, \phi$ donné par $\iota(x) = [x]_\phi$ et $\lambda : \mathfrak{H} \,|\, \phi \to \overset{-1}{\nu}(\downarrow \phi)$ par $\lambda[x]_\phi = \max[a]_\phi$.

Le codomaine de λ est bien défini car $\max[x]_\phi = \phi \to x$ et $\phi \to (\phi \to x) = \phi \to x$
$\iota\lambda[x]_\phi = \iota(\phi \to x) = [x]_\phi$ car $\phi \to x \overset{\phi}{\sim} x$
$\lambda\iota x = \lambda[a]_\phi = \phi \to x$, mais $x \in \overset{-1}{\nu}(\phi) \Longrightarrow \phi \to x = x$
ι et λ sont inverses l'une de l'autre, donc des bijections.

On transporte la structure de $\mathfrak{H} \,|\, \phi$ sur $Irrel^*(\phi)$ par λ et ensuite sur $\downarrow \phi$ par $\nu \,|\, Irrel^*(\phi)$ qui est aussi bijective.

Les connecteurs $\wedge$ et $\to$ peuvent être repris tels quels pour λ, car

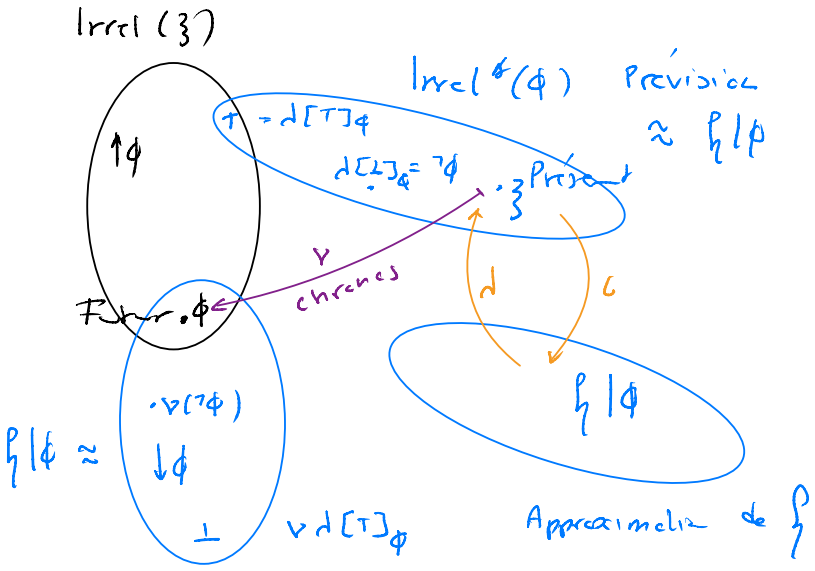
$$\lambda[x]_\phi \to \lambda[x']_\phi = (\phi \to x) \to (\phi \to x') = (\phi \wedge (\phi \to x)) \to x' =$$
$$= (\phi \wedge x) \to x' = \phi \to (x \to x') = \lambda[x \to x']_\phi$$
et $\lambda[x \wedge x'] = \phi \to (x \wedge x') = (\phi \to x) \wedge (\phi \to x') = \lambda[x]_\phi \wedge \lambda[x']_\phi$

La disjonction doit être transportée par $x \vee^* x = \phi \to (x \vee x')$.
En outre, on obtient les bornes par $\lambda[\ \top\ ]_\phi = \phi \to \phi = \top$ et $\lambda[\ \bot\ ] = \phi \to \neg\phi = \neg\phi$.

qed

Si ξ est l'état présent et ϕ l'instant succédant à ξ, on remarque que

- le filtre $\uparrow \phi = Irrel(\xi)$ valide les propositions futures
- l'idéal $\downarrow \phi$ traduit la réalité future comme approximation de $\mathfrak{H}$ à l'ordre ϕ
- cette approximation est donnée par la **prévision** $Irrel^*(\nu(\xi))$



7 Conclusion

La validation d'un ensemble de propositions par un filtre ϕ a pour effet de rendre égales toutes celles d'une même classe d'équivalence $[a]_\phi$. L'approximation $a \mapsto [\phi \wedge a, \phi \to a]$ est admissible car les éléments de l'intervalle, vus par ϕ, sont en fait des expressions différentes de la même propriété.

Ceci est à mettre en parallèle avec la construction de l'algèbre de Lindenbaum, où l'on considère comme égales deux propositions équivalentes.

Lorsque ϕ est un ultrafiltre, le quotient se réduit à l'algèbre de Boole $\{ \perp < \top \}$.
La sémantique est alors minimale.

La passage au quotient de la probabilité μ sur $\mathfrak{H}$ est donnée par la conditionnelle $(\mu \,|\, \phi)([a]_\phi) = \mu(a \,|\, \phi) = \dfrac{\mu(\phi \wedge a)}{\mu(\phi)}$, c'est à dire celle du le minimum de la classe.

Remarquons que c'est cohérent avec $(\mu \,|\, \phi)([\ \top\ ]_\phi) = \dfrac{\mu(\phi \wedge \phi)}{\mu(\phi)} = 1$ car $\top \overset{\phi}{\sim} \phi$ et $(\mu \,|\, \phi)([\ \perp\ ]_\phi) = \dfrac{\mu(\phi \wedge \neg\phi)}{\mu(\phi)} = 0$ car $\perp \overset{\phi}{\sim} \neg\phi$. Si $\mu(\phi) = 0$, le quotient est arbitraire. Ceci ne se produit que si au moins l'une de probabilités π est nulle. Il suffit alors de restreindre G à ses élément non négligeables.

L'opérateur d'irrelevance est consolidé dans son rôle de **chronos**.

$\mathfrak{H} \,|\, \phi$ donne les valeurs de vérité des propositions dans le futur. Nommons $V^+(y) = \nu(\xi) \to y$ cette valeur. On obtient $V^+(y) \leqslant V^+(y') \iff \nu(\xi) \to y \leqslant \nu(\xi) \to y'$, qui est équivalent à $\nu(\xi) \wedge y \leqslant y'$. C'est bien un conditionnement par le futur.

Soulignons le fait que l'opérateur ν exprime une évolution temporelle sans intention, car l'état postérieur est donné par le filtre d'irrelevance. Les orbites expriment une sorte de courbure de l'algèbre.