Processus de Markov canoniques sur une algèbre de Heyting

Jean-Pascal Laedermann

22 octobre 2025

(Ver 00)

0 Introduction

La présence de probabilités sur une algèbre de Heyting (AH) permet d'y introduire une évolution temporelle de type markovien. On se place ici dans le contexte des AH finies et où le temps évolue de manière discrète en une suite bien ordonnée d'instants.

Une *théorie*, ou un *système déductif* sera représenté par un filtre de l'AH. Dans le cas fini, tout filtre est principal et sera caractérisé par son infimum qualifié de *fond*.

On définira ci-dessous une notion d'*irrelevance* qui conduit naturellement à un opérateur d'évolution pas à pas nommé *chronos*, un moteur du temps, qui fait évoluer spontanément les théories.

Cet opérateur fera apparaître des orbites dans l'AH, et on montrera qu'il est une généralisation de la négation.

Enfin, on définira des probabilités de transition qui seront associées aux choix d'un acteur externe pour influencer l'évolution d'une théorie.

1 Notations

L'algèbre sera notée $\mathfrak{H}$ et ses filtres $\uparrow \xi, \xi \in \mathfrak{H}$.
Une probabilité sur $\mathfrak{H}$ est tout d'abord définie comme probabilité classique sur son spectre. Ce spectre étant isomorphe à l'ensemble des filtres premiers de l'algèbre, il y sera inclus sous la forme de leurs fonds g qui formeront l'ensemble $G \subseteq \mathfrak{H}$.
Soit un élément $\xi \in \mathfrak{H}$. On notera $G\,.\,\xi = \{g \in G \,|\, g \leqslant \xi\}$ l'ensemble des fonds qui lui sont inférieurs. On sait que $\xi = \bigvee G\,.\,\xi$.
A toute probabilité π sur G on associe alors une probabilité μ sur $\mathfrak{H}$ par

$$\mu\xi = \sum_{g \in G.\xi} \pi g = \pi G$$

2 Irrelevance

La relation $x \to \xi = \xi$ traduit une notion d'*irrelevance* de x pour ξ. En effet, si l'on utilise le modus ponens pour démontrer ξ, on prouve $x \to \xi$, puis x. Si la relation ci dessus est vraie, cette deuxième étape n'est pas nécessaire.

On définit donc un ensemble $Ir\xi = \{x \in \mathfrak{H} \,|\, x \to \xi = \xi\}$.

Supposons que la théorie actuelle soit décrite par ξ. Cet ensemble apparaît idéalement comme celui des propositions qui seraient futures à ξ, en ce sens que leur valeur n'a pas d'influence sur le présent.

Proposition

$Ir\xi$ est un filtre.

Demo

Soit $x \in Ir\xi$ et $x' \geqslant x$. On a $x \to \xi = \xi \Longrightarrow x' \to \xi \leqslant \xi$. Mais on a toujours $\xi \leqslant x' \to \xi$ donc $x' \in Ir\xi$.

Si $x, x' \in Ir\xi$, alors $(x \to \xi) \wedge (x' \to \xi) = (x \wedge x') \to \xi = x \wedge x'$ et $x \wedge x' \in Ir\xi$.

qed.

C'est donc une théorie, qui est caractérisée par son fond $\bigwedge Ir\xi$.

Définition

$\nu\xi = \bigwedge Ir\xi$ est l'opérateur d'évolution *chronos*.

Proposition

ν est bijectif et $\nu^{op} = \nu^{-1}$, où ν^{op} est le ν de $\mathfrak{H}^{op}$
Si $\mathfrak{H}$ est booléenne, alors $\nu = \neg$.

Les filtres premiers sont les complémentaires des idéaux premiers qui sont aussi principaux.
On dénote par e les suprema de ces idéaux et par E leur ensemble.

Lemme 0

$\varphi = \bigwedge \{e \geqslant \varphi\} = \bigwedge Min\{e \geqslant \varphi\}$

Lemme 1

$$\nu(\varphi) = \bigvee_{e' \in Min\{e \geqslant \varphi\}} \nu(e')$$

Demo

$$\varphi = \bigvee_{g \leqslant \varphi} g = \bigvee_{g \in Max\{g \leqslant \varphi\}} g = \bigwedge_{e \in Min\{e \geqslant \varphi\}} e = \bigwedge_{e \geqslant \varphi} e$$

Demonstration de la proposition

$\nu : e \mapsto g$ est une bijection $E \to G$ qui respecte le passage Min-Max.

Si $\mathfrak{H}$ est booléenne on a :

$$\nu\xi = \inf\{x | x \to \xi = \xi\} = \inf\{x | \neg x \vee \xi = \xi\} = \inf\{x | \neg x \leqslant \xi\} = \inf\{x | x \geqslant \neg\xi\} = \neg\xi$$

qed

Définissons l'*information* associée à une proposition ξ par $Info\xi = -\log_2 \mu\xi$.
$\nu\xi$ est alors la proposition irrelevante à ξ d'information maximale.

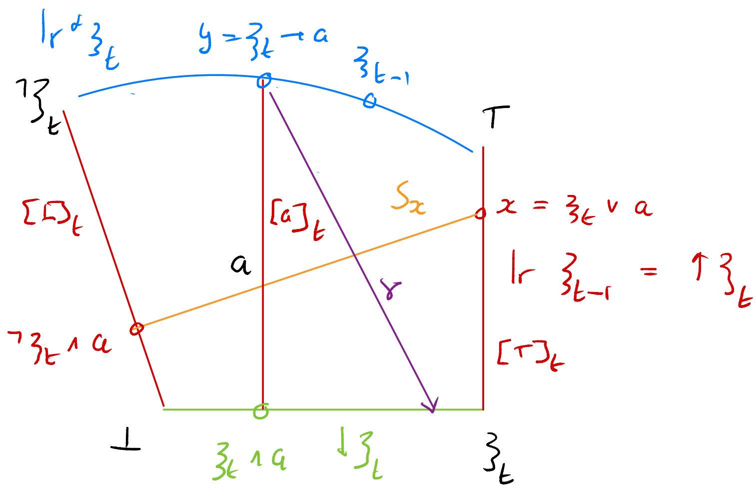
3 Evolution et algèbre quotient

3.1 Evolution canonique

Dualement, soit $Ir^*\xi = \{y \in \mathfrak{H} \,|\, \xi \to y = y\}$. C'est l'ensemble des propositions pour lesquelles ξ est irrelevante, qui peut être assimilé à l'instant précédant ξ.

On appellera *évolution canonique* le processus partant de ξ_0 et donné par $\xi_{t+1} = \nu\xi_t, t \in \mathbb{N}$. Comme ν est bijective, ce processus partitionne l'algèbre en orbites.

Examinons la figure ci-dessous.



La partie verte $\bot\ \xi_t$ est l'idéal $\downarrow \xi_t$, qui peut être assimilé aux causes de $\uparrow \xi_t$.
La partie rouge $\xi_t\ \top$ est le filtre $Ir\xi_t$, futur de ξ_{t-1}.
La partie bleue est $Ir^*\xi_t$. Elle contient ξ_{t-1} et ce n'est généralement pas un filtre.
Les parties rouges sont les classes d'équivalence du quotient $\mathfrak{H}\,|\,\xi$.
En effet, ce sont les intervalles $[\xi_t \wedge a, \xi_t \to a]$.

Proposition

La restriction de ν à $Ir^*\xi_t$ est une bijection $Ir^*\xi_t \to \downarrow \xi_t$.

Demo

$\xi_t \to y = y \Longrightarrow \inf\{\eta \,|\, \eta \to y = y\} \leqslant \xi_t$.

Or ν est injective et comme $\xi_t \wedge a = \xi_t \wedge b \Longleftrightarrow \xi_t \to a = \xi_t \to b \Longleftrightarrow a \overset{\uparrow\xi_t}{\sim} b$, les ensembles $Ir^*\xi_t$ et $\downarrow \xi_t$ sont tous deux des représentants des classes de $\mathfrak{H}\,|\,\xi_t$. Ils ont le même cardinal et la restriction de ν à $Ir^*\xi$ est surjective, puisque que $\downarrow \xi_t$ est fini.

qed.

ν transforme le passé en causes, c'est bien un moteur du temps.

On obtient un fibré de base $\downarrow \xi_t$ dont les fibres sont les classes d'équivalence et dont la base est formée des minima de ces classes. Ses sections $S_x = \{x \wedge y \,|\, y \in Ir^*\xi_t\}, x \geqslant \xi_t$ sont isomorphes à $\mathfrak{H} \,|\, \xi$ si on les munit de l'ordre induit par $\mathfrak{H}$. Elles sont stables par conjonction.

En outre, on peut définir, pour chaque élément $a \in \mathfrak{H}$, une partie réelle $Re_t = \xi_t \vee a = x$ et une partie imaginaire $Im_t a = \xi_t \to a = y$. On obtient ainsi une décomposition $a = x \wedge y$.

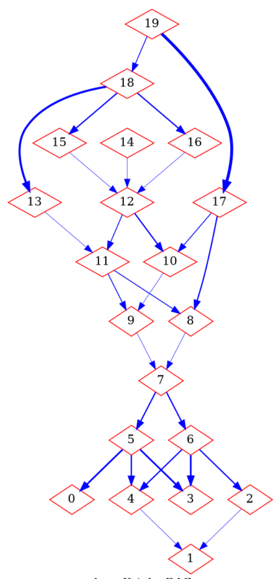
3.2 Evolution avec action

Après un pas d'évolution canonique, on peut imaginer qu'un acteur ait une connaissance de l'algèbre qui est approximée par le quotient $\mathfrak{H} \,|\, \xi_t$. Il peut donc choisir une classe $[a]$ et l'ajouter ou l'enlever à la théorie ξ_t. L'état de la théorie devient alors $\xi_t' = \xi_t \wedge a$ en cas d'ajout, et $\xi_t' = \bigvee_{g \leqslant \xi_t, g \nleqslant a} g$ en cas de suppression.

Remarquons que
 ce nouvel état ne dépend que de la classe de a,
 $Re_t a$ est toujours vraie,
 $\nu Im_t a$ est toujours une cause de l'état actuel,
 la classe de a est représentée par sa partie imaginaire,
 un acteur ne voit que la partie imaginaire des propositions.

3.3 Exemple

Pour l'algèbre suivante, 10'000 pas ont été effectués. C'est un processus de Markov. Lors du premier quart, l'acteur ajoute $g \in G$ au hasard selon π, lors du second, il ajoute systématiquement la proposition initiale du processus, lors du troisième, il élimine au hasard selon π un élément $g \in G \,.\, \xi_t$ et lors du quatrième, il n'agit pas ($a = \top$).

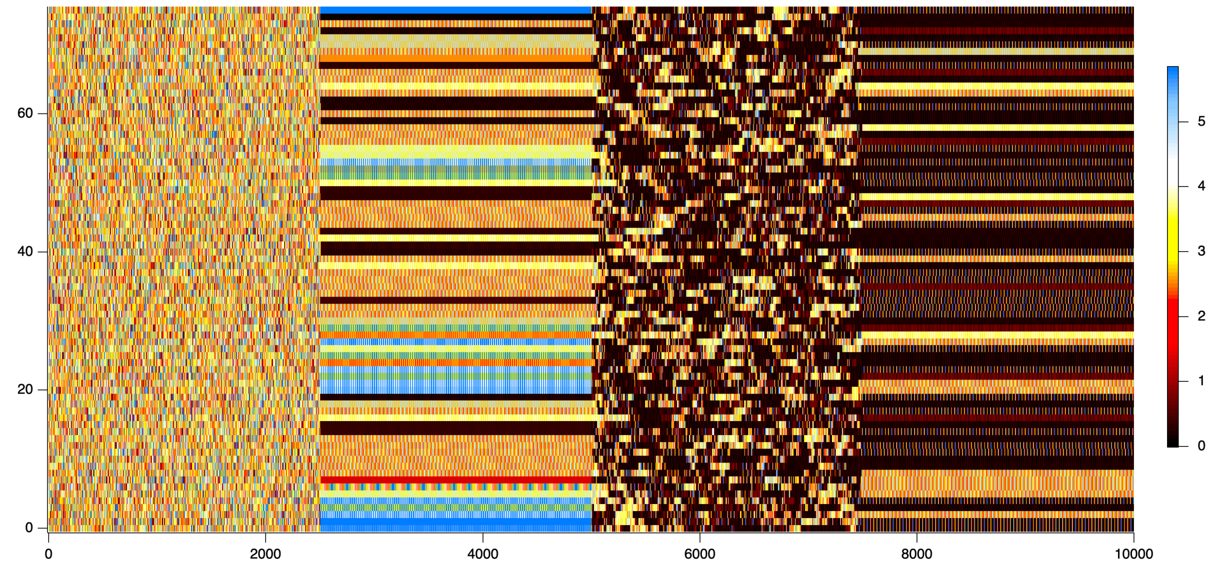

clone Kripke DAG

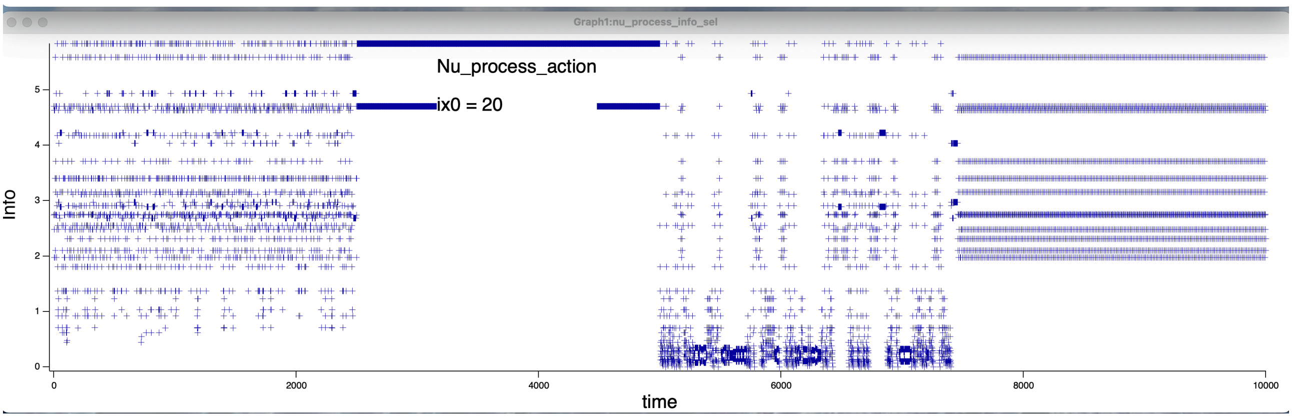
Le spectre de l'algèbre se trouve ci-contre
Les orbites du processus canonique sont les suivantes


clone Orbit

On a représenté ci-dessous les évolutions de l'information associée aux théories. En ordonnée se trouvent les théories initiales et le temps est en abscisse.

Le graphique exhibe l'évolution associée à la théorie $\uparrow 20$.





4 Conclusion

La notion d'irrelevance conduit à un opérateur chronos qui permet d'envisager le temps à travers l'évolution d'une théorie initiale.

Une probabilité sur une algèbre de Heyting permet de générer des processus markoviens qui rendent compte d'une connaissance approximative de l'algèbre de base.

5 Bibliographie

Peter T. Johnstone	Stone Spaces	(Cambridge)
Jorge Picado, Aleš Pultr	Frames and Locales	(Springer)
B.A. Davey, H.A.Pristley	Introduction to Lattices and Order	(Cambridge)
A.M. Yaglom, I.M. Yaglom	Probabilité et information	(Wiley)