Deux approches de l’opérateur Chronos

Jean-Pascal Laedermann

18 novembre 2025

(Ver 02)

0 Introduction

Depuis l'association canonique des filtres premiers à leurs complémentaires les idéaux premiers, on construit un opérateur de déroulement temporel qui peut être vu de deux manières.

La première, dynamique, fait intervenir la notion d'*irrelevance* et aboutit à une modélisation de l'instant présent sous la forme d'un fibré quotient. La seconde est topologique. Basée sur la représentation de Stone, elle permet d'introduire une notion de *continuité*.

Le but de ce bref papier est de donner une formulation cohérente à ces deux points de vue. On se limite au cas fini.

1 Point de vue chronologique

Le *spectre* de $\mathfrak{H}$ est défini comme l'ensemble Sp de ses idéaux premiers.
Ces idéaux sont principaux et leurs complémentaires sont des filtres premiers qui sont aussi principaux.

Les sups de ces idéaux forment l'ensemble E des *éléments premiers* de $\mathfrak{H}$. Les infs des filtres associés forment l'ensemble G des *fonds* de l'algèbre. Soit ν l'application qui à tout $e \in E$ associe le $g \in G$ du filtre complémentaire, autrement dit $\nu(e) = \inf \complement \downarrow e$. Cette application réalise une bijection entre E et G. Le but de ce paragraphe est d'étendre ν à $\mathfrak{H}$.

Une proposition $\xi \in \mathfrak{H}$ est l'inf du filtre $\uparrow \xi$ qui peut être considéré comme l'ensemble des propositions vraies à un certain moment. Cet ensemble est interprété comme état actuel d'un certain système. On définit

$Ir\xi = \{x \in \mathfrak{H} \,|\, x \to \xi = \xi\}$, les propositions qui sont *irrelevantes* à l'état actuel
et son dual $Ir^*\xi = \{y \in \mathfrak{H} \,|\, \xi \to y = y\}$.

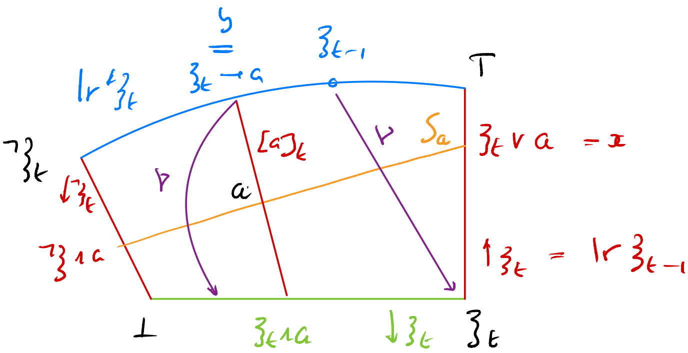
Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'influence du futur sur le passé, $Ir\xi$ est un candidat idéal pour décrire l'instant suivant. Or on a obtenu précédemment le

Théorème

$Ir\xi$ est un filtre.
L'application $\nu : \xi \mapsto \inf Ir\xi$ est une bijection.
C'est une extension de l'application ν ci-dessus.
Si l'algèbre est booléenne, alors $\nu = \neg$.

ν est nommé *chronos*.

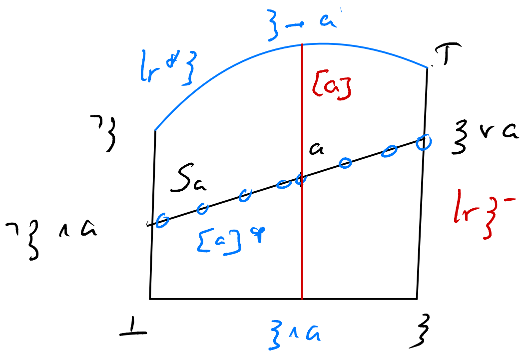
Le diagramme ci-contre résume le passage d'un instant ξ_{t-1} à son successeur ξ_t.



$\mathfrak{H}$ devient un fibré de base $\downarrow \xi_t$ dont les fibres sont les classes d'équivalence $[a]_{\xi_t} \in \mathfrak{H} \,|\, \xi_t$.
Les sections de ce fibré sont données par $S_a = \{(\xi_t \vee a) \wedge \eta \,|\, \eta \in Ir^* \xi_t\}$.

On obtient les propositions suivantes pour les sections et les classes d'équivalence :

$S_a \ni a$
$a = (\xi_t \vee a) \wedge \eta \quad \eta = \xi_t \to a$
$\min S = \neg \xi_t \wedge a \quad \max S_a = \xi_t \vee a$
$S_a = S_{a'} \iff [a]^{op} = [a']^{op}$
$[a]^{op} \subseteq S_a$
$S_a \cap [a] = \{a\}$
$[a] \cap [a]^{op} = \{a\}$
S_a est stable par $\wedge$ et $\to$



2 Point de vue topologique

Les ensembles E et G agissent sur $\mathfrak{H}$ selon :

$$E \,.\, a = \{e \in E \,|\, e \geqslant a\} \quad G \,.\, a = \{g \in G \,|\, g \leqslant a\}$$

Les éléments de $G \,.\, a$ sont nommées *pattes* de a et ceux de $E \,.\, a$ ses *co-pattes*.

On remarque que $a = \inf E \,.\, a = \sup G \,.\, a$.

La représentation de Stone associe à tout élément $a \in \mathfrak{H}$ un ouvert de son spectre.

Ces ouverts sont de la forme $\mathscr{D}(a) = \{I_p \in Sp \,|\, I_p \not\ni a\}$.
$\mathscr{D}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{H}$ vers son image.

La fonction $I_p \mapsto \sup I_p$ transporte ces ouverts vers E qui devient alors un espace topologique dont les ouverts sont $D(a) = \{e \in E \,|\, e \ngeqslant a\}$. On voit facilement que $\complement_E D(a) = E \,.\, a$ et que les co-pattes forment des fermés. On remarque ensuite que $\nu^{\exists}(E \,.\, a) = \complement_G G \,.\, \nu(a)$[1], ce qui fait de $G \,.\, \nu(a)$ un ouvert si l'on désire que ν soit continue sur E. On introduit encore les antichaines de E et G par les relations $E_{ac}(a) = Min(E \,.\, a) \quad G_{ac}(a) = Max(G \,.\, a),\ Min, Max$ étant (resp.) les ensembles d'éléments minimaux et maximaux de E et G. Ces antichaines sont aussi en relation d'isomorphie avec $\mathfrak{H}$.

En résumé, on a

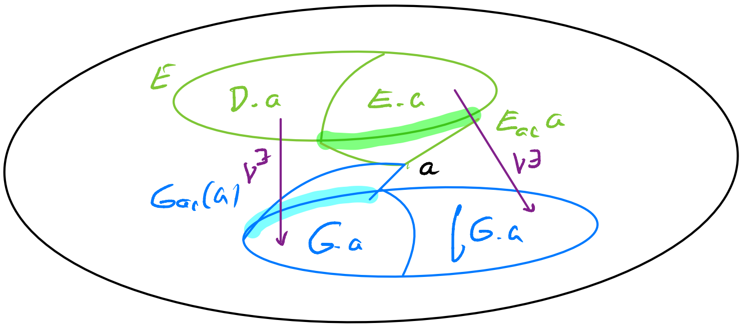
$$\begin{array}{ll} E \,.\, a & \text{fermé} \\ G \,.\, a & \text{ouvert} \end{array}$$
$$G \,. = \complement_G \circ \nu^{\exists} \circ E \,.$$
$$\nu^{\exists} \circ E_{ac} = G_{ac} \circ \nu$$

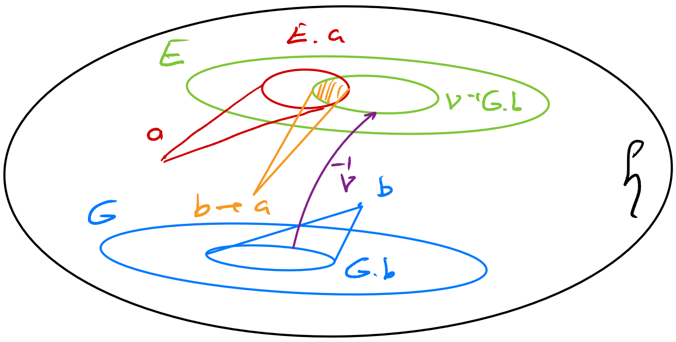
[1] On distingue ν de son extension aux parties de E. $\nu^{\exists}$ est l'adjointe à gauche de $\overset{-1}{\nu}$.

Comme corollaire, on obtient aussi une expression pour les implications de $\mathfrak{H}$:

$$b \to a = \inf(\overset{-1}{\nu}\, G\,.\,b \cap E\,.\,a)$$
$$b \to^{op} a = \sup(\nu^{\exists} E\,.\,b \cap G\,.\,a)$$

Le diagramme sotto illustre la situation :





3 Conclusion

$Ir^*\xi$ peut être considéré comme l'ensemble des passés possibles de ξ_t. Celui qui a été instancié est ξ_{t-1}, qui appartient bien à cet ensemble.

ν établit une bijection entre $Ir^*\xi$ et $\downarrow \xi_t$, qui est l'ensemble des causes de ξ_t. ν transforme le passé en causes du présent.

Le quotient $\mathfrak{H}\,|\,\xi_t$ d'interprète comme l'information actuelle sur le système disponible pour un observateur.